गणित

(दसवीं कक्षा के लिए)

1063

ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਪੰਜਾਬ ਸਰਕਾਰ ਦੁਆਰਾ ਮੁਫ਼ਤ
ਦਿੱਤੀ ਜਾਣੀ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਕਰੀ ਲਈ ਨਹੀਂ ਹੈ।

पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड

साहिबज़ादा अजीत सिंह नगर

© पंजाब सरकार

प्रथम संस्करण 2014
संशोधित संस्करण 2021 .... 5,000 प्रतियां

[This book has been adopted with the kind permission of the National Council of Educational Research and Training, New Delhi]

All rights, including those of translation, reproduction and annotation etc., are reserved by the Punjab Government

संयोजक : **प्रितपाल सिंह कथूरिया**
विषय माहिर पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड,

चित्रकार : **मनजीत सिंह ढिल्लों**

चेतावनी

1. कोई भी एजेंसी-होल्डर अधिक पैसे लेने के उद्देश्य से पाठ्य-पुस्तकों पर जिल्दबन्दी नहीं कर सकता। (एजेंसी-होल्डरों के साथ हुए समझौते की धारा नं. 7 के अनुसार)
2. पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड द्वारा मुद्रित तथा प्रकाशित पाठ्य-पुस्तकों के जाली और नकली प्रकाशन (पाठ्य-पुस्तकों) की छपाई, प्रकाशन, स्टॉक करना, जमाखोरी या बिक्री आदि करना भारतीय दंड प्रणाली के अन्तर्गत गैरकानूनी जुर्म है।
   (पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड की पाठ्य-पुस्तकें बोर्ड के 'वाटर मार्क' वाले कागज़ के ऊपर ही मुद्रित की जाती हैं।)

ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਵਿਕਰੀ ਲਈ ਨਹੀਂ ਹੈ।

सचिव, पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड, विद्या भवन फेज़-8, साहिबज़ादा अजीत सिंह नगर 160062 द्वारा प्रकाशित एवं राहुल आर्ट एंड प्रैस, जालंधर द्वारा मुद्रित ।

प्राक्कथन

पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड पाठ्य-पुस्तकों के संशोधन और तैयार करने के कार्य में निरन्तर प्रयत्नशील है। आधुनिक युग में, विद्यार्थियों को सही शिक्षा देना अभिभावक और अध्यापकों का साँझा उत्तरदायित्व है। इस उत्तरदायित्व और शैक्षिक आवश्यकताओं को समझते हुए गणित के पाठ्यक्रम और पाठ्य-पुस्तकों में राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) के आधार पर महत्वपूर्ण परिवर्तन किये जा रहे हैं।

स्कूल पाठ्यचर्या में गणित विषय का महत्वपूर्ण योगदान है और आवश्यक शैक्षिक परिणाम प्राप्त करने के लिए अच्छी पाठ्य-पुस्तक का होना प्राथमिकता है। अत: इस पाठ्य-पुस्तक में विषय सामग्री इस प्रकार व्यवस्थित की गई है जिससे विद्यार्थियों की तार्किक क्षमता विकसित होने के साथ-साथ विषय को समझने की योग्यता में बढोत्तरी होगी। अभ्यास प्रश्न विद्यार्थियों के मानसिक स्तर के अनुसार तैयार किये गये हैं। यह पाठ्य-पुस्तक एन. सी. ई. आर. टी. द्वारा **दसवीं** कक्षा के लिए तैयार की गई और पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड द्वारा एन. सी. ई. आर. टी. से अनुमति प्राप्त करने के उपरान्त प्रकाशित की गई है।

पाठ्य-पुस्तक को विद्यार्थियों और अध्यापकों के लिए अधिक से अधिक उपयोगी बनाने का भरपूर प्रयास किया गया है। फिर भी, पुस्तक को और अधिक अच्छा बनाने के लिए क्षेत्र से आये बढ़िया सुझाव आदर सहित स्वीकार किये जायेंगे।

चेयरमैन

पंजाब स्कूल शिक्षा बोर्ड

'ਸਮਾਜਿਕ ਨਿਆਂ, ਅਧਿਕਾਰਤਾ ਅਤੇ ਘੱਟ ਗਿਣਤੀ ਵਿਭਾਗ', ਪੰਜਾਬ

NCERT की पाठ्यपुस्तक विकास समिति

विज्ञान एवं गणित के सलाहकार समूह के अध्यक्ष

जयंत विष्णु नारलीकर, *इमीरिटस* प्रोफ़ेसर, अध्यक्ष, आई.यू.सी.ए.ए., गणेशखिंड, पूना विश्वविद्यालय, पुणे

मुख्य सलाहकार

पी. सिंक्लेयर, *प्रोफेसर,* विज्ञान विद्यापीठ, इ.गाँ.रा.मु.वि., नयी दिल्ली

जी.पी. दीक्षित, *प्रो.फ़ेसर* (सेवानिवृत्त) गणित और खगोलिकी विभाग, लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ

मुख्य समन्वयक

हुकुम सिंह, *प्रो.फ़ेसर,* डी.ई.एस.एम. रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

सदस्य

अंजली लाल, *पी.जी.टी.* (गणित) डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल सेक्टर-14, गुड़गाँव

आशुतोष के. वझलवार, *प्रो.फ़ेसर,* डी.ई.एस.एम. रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

बी. एस. उपाध्याय, *प्रो.फ़ेसर,* आर. आई. ई. मैसूर

जयंती दत्ता *पी.जी.टी.,* सलवान पब्लिक स्कूल, गुड़गाँव

महेन्द्र शंकर, *लेक्चरर* (एस.जी.) (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

मनिक अग्रवाल, ग्रीन पार्क, नयी दिल्ली

एन. डी. शुक्ला, *प्रो.फ़ेसर* (सेवानिवृत्त), लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ

राम अवतार, *प्रो.फ़ेसर* (सेवानिवृत्त) एवं परामर्शदाता, डी.ई.एस.एम. रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

रामा बालाजी, *टी.जी.टी.* (गणित), के.वी. मेग ऐंड सेंटर, सेंट जानस रोड, बंगलौर

शशिधर जगदीशन, शिक्षक और सदस्य, गवरनिंग काउंसिल, सेंटर फॉर लर्निंग, बंगलौर

एस. के.सिंह गौतम, प्रो.फ़ेसर, डी.ई.एस.एम. रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

वंदिता कालरा, *लेक्चरर,* सर्वोदय कन्या विद्यालय, डिस्ट्रिक्ट सेंटर विकासपुरी, दिल्ली

वी.ए. सुजाता, *टी.जी.टी.,* केन्द्रीय विद्यालय न. 1, वास्को, गोआ

वी. माधवी. *टी.जी.टी.,* संस्कृति स्कूल, चाणक्यपुरी, नयी दिल्ली

सदस्य-समन्वयक

आर.पी. मौर्य, *एसोशिएट* प्रोफ़ेसर, डी.ई.एस.एम. रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

हिंदी रूपांतरकर्ता

जी.पी. दीक्षित, *प्रोफ़ेसर,* (सेवानिवृत्त) गणित और खगोलिकी विभाग, लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ

महेन्द्र शंकर, *लेक्चरर* (एस.जी.) (सेवानिवृत्त), रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

एच.पी. सिन्हा, C-210 राजाजीपुरम, लखनऊ

वी. पी. सिंह, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम. रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

हिंदी-समन्वयक

सुरेश कुमार सिंह गौतम, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम. रा.शै.अ.प्र.प., नयी दिल्ली

विषय सूची

1.	वास्तविक संख्याएँ	1
2.	बहुपद	23
3.	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	42
4.	द्विघात समीकरण	78
5.	समांतर श्रेढ़ियाँ	102
6.	त्रिभुज	130
7.	निर्देशांक ज्यामिति	170
8.	त्रिकोणमिति का परिचय	191
9.	त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	216
10.	वृत्त	228
11.	रचनाएँ	238
12.	वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल	245
13.	पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	262
14.	सांख्यिकी	285
15.	प्रायिकता	323
परिशिष्ट 1 – गणितीय उपपत्तियाँ		344
परिशिष्ट 2 – गणितीय निदर्शन		369
उत्तर/संकेत		382

1063CH01

वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers) 1

1.1 भूमिका

कक्षा 9 में, आपने वास्तविक संख्याओं की खोज प्रारंभ की और इस प्रक्रिया से आपको अपरिमेय संख्याओं को जानने का अवसर मिला। इस अध्याय में, हम वास्तविक संख्याओं के बारे में अपनी चर्चा जारी रखेंगे। यह चर्चा हम अनुच्छेद 1.2 तथा 1.3 में धनात्मक पूर्णांकों के दो अति महत्वपूर्ण गुणों से प्रारंभ करेंगे। ये गुण हैं: यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (कलन विधि) (Euclid's division algorithm) और अंकगणित की आधारभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Arithmetic)।

जैसा कि नाम से विदित होता है, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म पूर्णांकों की विभाज्यता से किसी रूप में संबंधित है। साधारण भाषा में कहा जाए, तो एल्गोरिथ्म के अनुसार, एक धनात्मक पूर्णांक a को किसी अन्य धनात्मक पूर्णांक b से इस प्रकार विभाजित किया जा सकता है कि शेषफल r प्राप्त हो, जो b से छोटा (कम) है। आप में से अधिकतर लोग शायद इसे सामान्य लंबी विभाजन प्रक्रिया (long division process) के रूप में जानते हैं। यद्यपि यह परिणाम कहने और समझने में बहुत सरल है, परंतु पूर्णांकों की विभाज्यता के गुणों से संबंधित इसके अनेक अनुप्रयोग हैं। हम इनमें से कुछ पर प्रकाश डालेंगे तथा मुख्यत: इसका प्रयोग दो धनात्मक पूर्णांकों के महत्तम समापवर्तक (HCF) परिकलित करने में करेंगे।

दूसरी ओर, अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का संबंध धनात्मक पूर्णांकों के गुणन से है। आप पहले से ही जानते हैं कि प्रत्येक भाज्य संख्या (Composite number) को एक अद्वितीय रूप से अभाज्य संख्याओं (prime numbers) के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यही महत्वपूर्ण तथ्य *अंकगणित की आधारभूत प्रमेय* है। पुन:, यह परिणाम कहने और समझने में बहुत सरल है, परंतु इसके गणित के क्षेत्र में बहुत व्यापक और सार्थक अनुप्रयोग हैं। यहाँ, हम अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के दो मुख्य अनुप्रयोग देखेंगे। एक

तो हम इसका प्रयोग कक्षा IX में अध्ययन की गई कुछ संख्याओं, जैसे $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ और $\sqrt{5}$ आदि की अपरिमेयता सिद्ध करने में करेंगे। दूसरे, हम इसका प्रयोग यह खोजने में करेंगे कि किसी परिमेय संख्या, मान लीजिए $\frac{p}{q} (q \neq 0)$, का दशमलव प्रसार कब सांत (terminating) होता है तथा कब असांत आवर्ती (non-terminating repeating) होता है। ऐसा हम $\frac{p}{q}$ के हर q के अभाज्य गुणनखंडन को देखकर ज्ञात करते हैं। आप देखेंगे कि q के अभाज्य गुणनखंडन से $\frac{p}{q}$ के दशमलव प्रसार की प्रकृति का पूर्णतया पता लग जाएगा।

अतः, आइए अपनी खोज प्रारंभ करें।

1.2 यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका

निम्नलिखित लोक पहेली* पर विचार कीजिए:

एक विक्रेता सड़क पर चलते हुए अंडे बेच रहा था। एक आलसी व्यक्ति, जिसके पास कोई काम नहीं था, ने उस विक्रेता से वाक्-युद्ध प्रारंभ कर दिया। इससे बात आगे बढ़ गई और उसने अंडों की टोकरी को छीन कर सड़क पर गिरा दिया। अंडे टूट गए। विक्रेता ने पंचायत से कहा कि उस व्यक्ति से टूटे हुए अंडों का मूल्य देने को कहे। पंचायत ने विक्रेता से पूछा कि कितने अंडे टूटे थे। उसने निम्नलिखित उत्तर दिया:

दो-दो गिनने पर एक बचेगा;
तीन-तीन गिनने पर दो बचेंगे;
चार-चार गिनने पर तीन बचेंगे;
पाँच-पाँच गिनने पर चार बचेंगे;
छः-छः गिनने पर पाँच बचेंगे;
सात-सात गिनने पर कुछ नहीं बचेगा;
मेरी टोकरी में 150 से अधिक अंडे नहीं आ सकते।

अतः, कितने अंडे थे? आइए इस पहेली को हल करने का प्रयत्न करें। मान लीजिए अंडों की संख्या a है। तब उल्टे क्रम से कार्य करते हुए, हम देखते हैं कि a संख्या 150 से छोटी है या उसके बराबर है।

यदि सात-सात गिनें, तो कुछ नहीं बचेगा। यह $a = 7p + 0$ के रूप में परिवर्तित हो जाता है, जहाँ p कोई प्राकृत संख्या है।

* यह 'न्यूमेरेसी काउंट्स' (लेखकगण ए. रामपाल और अन्य) में दी पहेली का एक परिवर्तित रूप है।

यदि छः-छः गिनें, तो 5 बचेंगे। यह $a = 6q + 5$ के रूप में परिवर्तित हो जाता है, जहाँ q कोई प्राकृत संख्या है।

पाँच-पाँच गिनने पर, 4 बचेंगे। यह $a = 5s + 4$ में परिवर्तित हो जाता है, जहाँ s कोई प्राकृत संख्या है।

चार-चार गिनने पर, 3 बचेंगे। यह $a = 4t + 3$, में परिवर्तित हो जाता है, जहाँ t कोई प्राकृत संख्या है।

तीन-तीन गिनने पर 2 बचेंगे। यह $a = 3u + 2$ में परिवर्तित हो जाता है, जहाँ u कोई प्राकृत संख्या है।

दो-दो गिननेपर, 1 बचेगा। यह $a = 2v + 1$, में परिवर्तित हो जाता है जहाँ v कोई प्राकृत संख्या है।

अर्थात्, उपरोक्त प्रत्येक स्थिति में, हमारे पास दो धनात्मक पूर्णांक a और b हैं (लिए गए उदाहरण में b के मान क्रमशः 7, 6, 5, 4, 3 और 2 हैं)। इनमें a को b से भाग देने पर शेष r बचता है (उपरोक्त में r के मान क्रमशः 0, 5, 4, 3, 2 और 1 हैं) अर्थात्, r भाजक b से छोटा है। जैसे ही हम इस प्रकार के समीकरण लिखते हैं, हम यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका (Euclid's division lemma) का प्रयोग कर रहे हैं, जिसे प्रमेय 1.1 में दिया जा रहा है।

अब अपनी पहेली पर वापस आने पर, क्या आप कोई बात सोच कर बता सकते हैं कि इस पहेली को कैसे हल करेंगे? हाँ! आप 7 के ऐसे गुणजों को खोजिए जो उपरोक्त सभी प्रतिबंधों को संतुष्ट करें। जाँच और भूल विधि से (LCM का प्रयोग करके) आप ज्ञात कर सकते हैं कि अंडों की संख्या 119 थी।

इस बात का अनुभव करने के लिए कि यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका क्या है, पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों पर विचार कीजिए:

(i) 17, 6 (ii) 5, 12 (iii) 20, 4

जैसा कि हमने पहेली वाले उदाहरण में किया था, यहाँ भी हम प्रत्येक युग्म के लिए संबंध लिख सकते हैं जैसा कि नीचे दर्शाया गया है।

(i) $17 = 6 \times 2 + 5$ (17 में 6 दो बार जाता है और शेष 5 बचता है)

(ii) $5 = 12 \times 0 + 5$ (यह संबंध इसलिए सही है, क्योंकि 12, 5 से बड़ा है)

(iii) $20 = 4 \times 5 + 0$ (20 में 4 पाँच बार जाता है और कुछ शेष नहीं बचता)

अर्थात् धनात्मक पूर्णांकों a और b के प्रत्येक युग्म के लिए, हमने ऐसी पूर्ण संख्याएँ q और r ज्ञात कर चुके हैं कि

$$a = bq + r,\ 0 \le r < b$$ है।

ध्यान दीजिए कि q या r शून्य भी हो सकते हैं।

अब आप धनात्मक पूर्णांकों a और b के निम्नलिखित युग्मों के लिए पूर्णांक q और r ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए:

(i) 10, 3 (ii) 4, 19 (iii) 81, 3

क्या आप ध्यान दे रहे हैं कि q और r अद्वितीय हैं? ये ही केवल ऐसे पूर्णांक हैं, जो प्रतिबंधों $a = bq + r, 0 \leq r < b$ को संतुष्ट करते हैं। आपने यह भी समझ लिया होगा कि यह लंबी विभाजन प्रक्रिया के अतिरिक्त कुछ भी नहीं है, जिसे आप इतने वर्षों तक करते चले आए हैं तथा q और r को क्रमशः *भागफल (quotient)* और शेषफल *(remainder)* कहा जाता है।

इस परिणाम का औपचारिक कथन निम्नलिखित है:

प्रमेय 1.1 (यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका) : *दो धनात्मक पूर्णांक a और b दिए रहने पर, ऐसी अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ q और r विद्यमान हैं कि $a = bq + r, \ 0 \leq r < b$* है।

इस परिणाम की जानकारी संभवतः बहुत पहले समय से थी, परंतु लिखित रूप में इसका सर्वप्रथम उल्लेख यूक्लिड एलीमेंट्स (Euclid's Elements) की पुस्तक VII में किया गया। *यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (कलन विधि) इसी प्रमेयिका* (Lemma) पर आधारित है।

एल्गोरिथ्म सुपरिभाषित चरणों की एक श्रृंखला होती है, जो एक विशेष प्रकार की समस्या को हल करने की एक प्रक्रिया या विधि प्रदान करती है।

शब्द *'एल्गोरिथम'* 9वीं शताब्दी के एक फारसी गणितज्ञ अल-ख्वारिज़्मी के नाम से लिया गया है। वास्तव में, शब्द 'एलजबरा' (Algebra) भी इन्हीं की लिखित पुस्तक 'हिसाब अल-ज़बर वा अल मुकाबला' से लिया गया है।

प्रमेयिका एक सिद्ध किया हुआ कथन होता है और इसे एक अन्य कथन को सिद्ध करने में प्रयोग करते हैं।

मुहम्मद इब्न मूसा अल-ख्वारिज़्मी
(780 – 850 ई.)

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म दो धनात्मक पूर्णांकों का HCF (म.स.व.) परिकलित करने की एक तकनीक है। आपको याद होगा कि दो धनात्मक पूर्णांकों a और b का HCF (म.स.व.) वह सबसे बड़ा पूर्णांक d है, जो a और b दोनों को (पूर्णतया) विभाजित करता है।

म.स.व.

आइए सबसे पहले एक उदाहरण लेकर देखें कि यह एल्गोरिथ्म किस प्रकार कार्य करता है। मान लीजिए हमें पूर्णांकों 455 और 42 का HCF (म.स.व.) ज्ञात करना है। हम बड़े पूर्णांक 455 से प्रारंभ करते हैं। तब यूक्लिड प्रमेयिका से, हमें प्राप्त होता है:

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

अब भाजक 42 और शेषफल 35 लेकर, यूक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$42 = 35 \times 1 + 7$$

अब, भाजक 35 और शेषफल 7 लेकर, यूक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$35 = 7 \times 5 + 0$$

ध्यान दीजिए कि यहाँ शेषफल शून्य आ गया है तथा हम आगे कुछ नहीं कर सकते। हम कहते हैं कि इस स्थिति वाला भाजक, अर्थात् 7 ही 455 और 42 का HCF (म.स.व.) है। आप इसकी सत्यता की जाँच 455 और 42 के सभी गुणनखंडों को लिखकर कर सकते हैं। यह विधि किस कारण कार्य कर जाती है?

इसका कारण **यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म** है, जिसके चरणों को नीचे स्पष्ट किया जा रहा है:

दो धनात्मक पूर्णांकों, मान लीजिए c और d $(c > d)$ का HCF (म.स.व.) ज्ञात करने के लिए नीचे दिए हुए चरणों का अनुसरण कीजिए:

चरण 1 : c और d के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कीजिए। इसलिए, हम ऐसे q और r ज्ञात करते हैं कि $c = dq + r$, $0 \le r < d$ हो।

चरण 2 : यदि $r = 0$ है, तो d पूर्णांकों c और d का HCF (म.स.व.) है। यदि $r \neq 0$ है, तो d और r के लिए, यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कीजिए।

चरण 3 : इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए, जब तक शेषफल 0 न प्राप्त हो जाए। इसी स्थिति में, प्राप्त भाजक ही वांछित HCF (म.स.व.) है।

यह एल्गोरिथ्म इसलिए प्रभावशाली है, क्योंकि HCF (म.स.व.) (c, d) = HCF (म.स.व.) (d, r) होता है, जहाँ संकेत HCF (म.स.व.) (c, d) का अर्थ है c और d का HCF (म.स.व.)।

उदाहरण 1 : 4052 और 12576 का HCF यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।

हल :

चरण 1 : यहाँ $12576 > 4052$ है। हम 12576 और 4052 पर यूक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करने पर, प्राप्त करते हैं:

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

चरण 2 : क्योंकि शेषफल $420 \neq 0$ है, इसलिए हम 4052 और 420 के लिए यूक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करके निम्नलिखित प्राप्त करते हैं:

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

चरण 3 : हम नए भाजक 420 और नए शेषफल 272 को लेकर यूक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करके, निम्नलिखित प्राप्त करते हैं:

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

अब, हम नए भाजक 272 और नए शेषफल 148 पर यूक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करके प्राप्त करते हैं:

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

अब, हम नए भाजक 148 और नए शेषफल 124 पर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके प्राप्त करते हैं:

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

अब, हम नए भाजक 124 और नए शेषफल 24 पर यूक्लिड प्रमेयिका लगा कर, प्राप्त करते हैं:

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

अब, हम नए भाजक 24 और नए शेषफल 4 को लेकर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके, प्राप्त करते हैं:

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

यहाँ शेषफल 0 प्राप्त हो गया है। इसलिए प्रक्रिया यहाँ समाप्त हो जाती है। चूँकि इस स्थिति में भाजक 4 है, इसलिए 12576 और 4052 का HCF 4 है।

ध्यान दीजिए कि HCF (24, 4) = HCF (124, 24) = HCF (148, 124) = HCF (272, 148) = HCF (420, 272) = HCF (4052, 420) = HCF (12576, 4052) है।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म न केवल बड़ी संख्याओं के HCF परिकलित करने में उपयोगी है, अपितु यह इसलिए भी महत्वपूर्ण है कि यह उन एल्गोरिथ्मों में से एक है, जिनका कंप्यूटर में एक प्रोग्राम के रूप में सबसे पहले प्रयोग किया गया।

टिप्पणी :

1. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका और यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म परस्पर इतने अंतर्निहित हैं कि लोग प्राय: यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका को ही यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म कहते हैं।

2. यद्यपि यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका/एल्गोरिथ्म को केवल धनात्मक पूर्णांकों के लिए ही

लिखा गया है, परंतु इसे सभी पूर्णांकों (शून्य को छोड़कर अर्थात $b \neq 0$) के लिए लागू किया जा सकता है। यद्यपि, हम यहाँ इस तथ्य पर विचार नहीं करेंगे।

यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका/एल्गोरिथ्म के संख्याओं के गुणों से संबंधित अनेक अनुप्रयोग हैं। हम इन अनुप्रयोगों के कुछ उदाहरण नीचे दे रहे हैं:

उदाहरण 2 : दर्शाइए कि प्रत्येक धनात्मक सम पूर्णांक $2q$ के रूप का होता है तथा प्रत्येक धनात्मक विषम पूर्णांक $2q + 1$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हल : मान लीजिए a कोई धनात्मक पूर्णांक है तथा $b = 2$ है। तब यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से, किसी पूर्णांक $q \geq 0$ के लिए $a = 2q + r$ है जहाँ $r = 0$ है या $r = 1$ है, क्योंकि $0 \leq r < 2$ है। इसलिए, $a = 2q$ या $a = 2q + 1$ है।

यदि $a = 2q$ है तो यह एक सम पूर्णांक है। साथ ही, एक धनात्मक पूर्णांक या तो सम हो सकता है या विषम। इसलिए कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $2q + 1$ के रूप का होगा।

उदाहरण 3 : दर्शाइए कि एक धनात्मक विषम पूर्णांक $4q + 1$ या $4q + 3$ के रूप का होता है, जहाँ q एक पूर्णांक है।

हल : आइए एक धनात्मक विषम पूर्णांक a लेकर, प्रश्न को हल करना प्रारंभ करें। हम a और $b = 4$ में विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करते हैं।

चूँकि $0 \leq r < 4$ है, इसलिए संभावित शेषफल 0, 1, 2 और 3 हैं।

अर्थात् a संख्याओं $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$ या $4q + 3$ के रूप का हो सकता है जहाँ q भागफल है। चूँकि a एक विषम पूर्णांक है, इसलिए यह $4q$ और $4q + 2$ के रूप का नहीं हो सकता (क्योंकि दोनों 2 से विभाज्य हैं)।

इसलिए, कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $4q + 1$ या $4q + 3$ के रूप का होगा।

उदाहरण 4 : एक मिठाई विक्रेता के पास 420 *काजू की बर्फियाँ* और 130 *बादाम की बर्फियाँ* हैं। वह इनकी ऐसी ढेरियाँ बनाना चाहती है कि प्रत्येक ढेरी में बर्फियों की संख्या समान रहे तथा ये ढेरियाँ बर्फी की परात में न्यूनतम स्थान घेरें। इस काम के लिए, प्रत्येक ढेरी में कितनी बर्फियाँ रखी जा सकती हैं?

हल : यह कार्य जाँच और भूल विधि से किया जा सकता है। परंतु इसे एक क्रमबद्ध रूप से करने के लिए हम HCF (420, 130) ज्ञात करते हैं। तब, इस HCF से प्रत्येक ढेरी में रखी जा सकने वाली बर्फियों की अधिकतम संख्या प्राप्त होगी, जिससे ढेरियों की संख्या न्यूनतम होगी और परात में ये बर्फियाँ न्यूनतम स्थान घेरेंगी।

आइए, अब यूक्लिड एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके 420 और 130 का HCF ज्ञात करें।

$$420 = 130 \times 3 + 30$$
$$130 = 30 \times 4 + 10$$
$$30 = 10 \times 3 + 0$$

अत:, 420 और 130 का HCF 10 है।

इसलिए, प्रत्येक प्रकार की *बर्फियों* के लिए मिठाई विक्रेता दस-दस की ढेरी बना सकता है।

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित संख्याओं का HCF ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए:

(i) 135 और 225 (ii) 196 और 38220 (iii) 867 और 255

2. दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

3. किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना (आर्मी) की टुकड़ी को 32 सदस्यों वाले एक आर्मी बैंड के पीछे मार्च करना है। दोनों समूहों को समान संख्या वाले स्तंभों में मार्च करना है। उन स्तंभों की अधिकतम संख्या क्या है, जिसमें वे मार्च कर सकते हैं?

4. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए $3m$ या $3m + 1$ के रूप का होता है।
[**संकेत:** यह मान लीजिए x कोई धनात्मक पूर्णांक है। तब, यह $3q$, $3q + 1$ या $3q + 2$ के रूप में लिखा जा सकता है। इनमें से प्रत्येक का वर्ग कीजिए और दर्शाइए कि इन वर्गों को $3m$ या $3m + 1$ के रूप में लिखा जा सकता है।]

5. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन $9m$, $9m + 1$ या $9m + 8$ के रूप का होता है।

1.3 अंकगणित की आधारभूत प्रमेय

आप पिछली कक्षाओं में देख चुके हैं कि किसी भी प्राकृत संख्या को उसके अभाज्य गुणनखंडों के एक गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है। उदाहरणार्थ, $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$, इत्यादि। अब, आइए प्राकृत संख्याओं पर एक अन्य दृष्टिकोण से विचार करने का प्रयत्न करें। अर्थात् यह देखें कि क्या अभाज्य संख्याओं को गुणा करके, एक प्राकृत संख्या प्राप्त की जा सकती है। आइए इसकी जाँच करें।

कुछ अभाज्य संख्याओं, मान लीजिए 2, 3, 7, 11 और 23 का कोई संग्रह लीजिए। यदि हम इन संख्याओं में से कुछ या सभी संख्याओं को इस प्रकार गुणा करें कि इन संख्याओं की हम जितनी बार चाहें पुनरावृत्ति कर सकते हैं, तो हम धनात्मक पूर्णांकों का एक बड़ा

संग्रह बना सकते हैं (वास्तव में, अपरिमित रूप से अनेक)। आइए इनमें से कुछ की सूची बनाएँ:

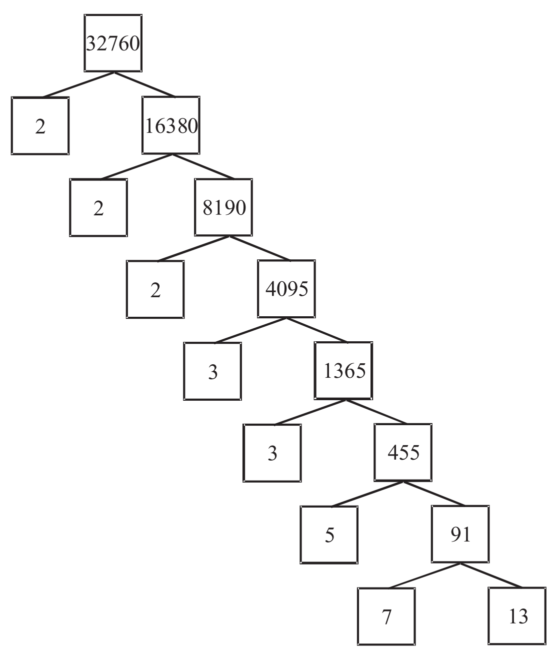
$7 \times 11 \times 23 = 1771$, $3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$,

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$, $2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$,

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ इत्यादि।

अब मान लीजिए कि आपके संग्रह में, सभी संभव अभाज्य संख्याएँ सम्मिलित हैं। इस संग्रह की आमाप (size) के बारे में आप क्या अनुमान लगा सकते हैं? क्या इसमें परिमित (finites) संख्या में पूर्णांक सम्मिलित हैं अथवा अपरिमित रूप से अनेक पूर्णांक सम्मिलित हैं? वास्तव में, अभाज्य संख्याएँ अपरिमित (Infinites) रूप से अनेक हैं। इसलिए, यदि हम इन अभाज्य संख्याओं को सभी संभव प्रकारों से संयोजित करें तो हमें सभी अभाज्य संख्याओं और अभाज्य संख्याओं के सभी संभव गुणनफलों का एक अनंत संग्रह प्राप्त होगा। अब प्रश्न उठता है, क्या हम इस प्रकार से सभी भाज्य संख्याएँ (composite numbers) प्राप्त कर सकते हैं? आप क्या सोचते हैं? क्या आप सोचते हैं कि कोई ऐसी भाज्य संख्या हो सकती है जो अभाज्य संख्याओं की घातों (powers) का गुणनफल न हो? इसका उत्तर देने से पहले, आइए धनात्मक पूर्णांकों के गुणनखंडन करें, अर्थात् अभी तक जो हमने किया है उसका उल्टा करें।

हम एक गुणनखंड वृक्ष (factor tree) का प्रयोग करेंगे जिससे आप पूर्व परिचित हैं। आइए, एक बड़ी संख्या, मान लीजिए 32760, लें और उसके गुणनखंड नीचे दर्शाए अनुसार करें:



इस प्रकार, हमने 32760 को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में गुणनखंडित कर लिया है, जो $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ है। अर्थात् $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ है, जो अभाज्य संख्याओं की घातों के गुणनफल रूप में हैं। आइए एक अन्य संख्या, मान लीजिए 123456789 लेकर उसके गुणनखंड लिखें। इसे $3^2 \times 3803 \times 3607$ के रूप में लिखा जा सकता है। निस्संदेह, आपको इसकी जाँच करनी होगी कि 3803 और 3607 अभाज्य संख्याएँ हैं। (ऐसा ही अनेक अन्य प्राकृत संख्याएँ लेकर स्वयं करने का प्रयत्न करें।) इससे हमें यह अनुमान या कंजेक्चर (conjecture) प्राप्त होता है कि प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं की घातों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है। वास्तव में, यह कथन सत्य है तथा पूर्णांकों के अध्ययन में यह मूलरूप से एक अति महत्वपूर्ण स्थान रखता है। इसी कारण यह कथन **अंकगणित की आधारभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Arithmetic)** कहलाता है। आइए इस प्रमेय को औपचारिक रूप से व्यक्त करें।

प्रमेय 1.2 (अंकगणित की आधारभूत प्रमेय): *प्रत्येक भाज्य संख्या* (Composite number) *को अभाज्य संख्याओं* (Prime numbers) *के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता है तथा यह गुणनखंडन अभाज्य गुणनखंडों के आने वाले क्रम के बिना अद्वितीय होता है।*

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के रूप में विख्यात होने से पहले, प्रमेय 1.2 का संभवतया सर्वप्रथम वर्णन यूक्लिड के एलीमेंट्स की पुस्तक IX में साध्य (proposition) 14 के रूप में हुआ था। परंतु इसकी सबसे पहले सही उपपत्ति कार्ल फ्रैड्रिक गॉस (Carl Friedrich Gauss) ने अपनी कृति *डिसक्वीशंस अरिथिमेटिकी (Disquisitions Arithmeticae)* में दी।

कार्ल फ्रैड्रिक गॉस को प्राय: 'गणितज्ञों का राजकुमार' कहा जाता है तथा उनका नाम सभी समयकालों के तीन महानतम गणितज्ञों में लिया जाता है, जिनमें आर्किमिडीज़ (Archimedes) और न्यूटन (Newton) भी सम्मिलित हैं। उनका गणित और विज्ञान दोनों में मौलिक योगदान है।

कार्ल फ्रैड्रिक गॉस (1777 – 1855)

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय कहती है कि प्रत्येक भाज्य संख्या अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में गुणनखंडित की जा सकती है। वास्तव में, यह और भी कुछ कहती है। यह कहती है कि एक दी हुई भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में, बिना यह ध्यान दिए कि अभाज्य संख्याएँ किस क्रम में आ रही हैं,

एक **अद्वितीय** प्रकार (Unique way) से गुणनखंडित किया जा सकता है। अर्थात् यदि कोई भाज्य संख्या दी हुई है, तो उसे अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखने की केवल एक ही विधि है, जब तक कि हम अभाज्य संख्याओं के आने वाले क्रम पर कोई विचार नहीं करते। इसलिए, उदाहरणार्थ, हम $2 \times 3 \times 5 \times 7$ को वही मानते हैं जो $3 \times 5 \times 7 \times 2$, को माना जाता है। इसी प्रकार, इन्हीं अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के किसी अन्य क्रम को भी हम $2 \times 3 \times 5 \times 7$ जैसा ही मानेंगे। इस तथ्य को निम्नलिखित रूप में भी व्यक्त किया जाता है:

एक प्राकृत संख्या का अभाज्य गुणनखंडन, उसके गुणनखंडों के क्रम को छोड़ते हुए अद्वितीय होता है।

व्यापक रूप में, जब हमें एक भाज्य संख्या x दी हुई हो, तो हम उसे $x = p_1p_2 \ldots p_n$, के रूप में गुणनखंडित करते हैं, जहाँ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ इत्यादि आरोही क्रम में लिखी अभाज्य संख्याएँ हैं। अर्थात् $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$ है। यदि हम समान अभाज्य संख्याओं को एक साथ (मिला) लें, तो हमें अभाज्य संख्याओं की घातें (powers) प्राप्त हो जाती हैं।

उदाहरणार्थ, $32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$

एक बार यह निर्णय लेने के बाद कि गुणनखंडों का क्रम आरोही होगा तो दी हुई संख्या के अभाज्य गुणनखंड अद्वितीय होंगे।

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के गणित तथा अन्य क्षेत्रों में भी अनेक अनुप्रयोग हैं। आइए इनके कुछ उदाहरण को देखें।

उदाहरण 5 : संख्याओं 4^n पर विचार कीजिए, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है। जाँच कीजिए कि क्या n का कोई ऐसा मान है, जिसके लिए 4^n अंक शून्य (0) पर समाप्त होता है।

हल : यदि किसी n के लिए, संख्या 4^n शून्य पर समाप्त होगी तो वह 5 से विभाज्य होगी। अर्थात् 4^n के अभाज्य गुणनखंडन में अभाज्य संख्या 5 आनी चाहिए। यह संभव नहीं है क्योंकि $4^n = (2)^{2n}$ है। इसी कारण, 4^n के गुणनखंडन में केवल अभाज्य संख्या 2 ही आ सकती है। अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता हमें यह निश्चित कराती है कि 4^n के गुणनखंडन में 2 के अतिरिक्त और कोई अभाज्य गुणनखंड नहीं है। इसलिए ऐसी कोई संख्या n नहीं है, जिसके लिए 4^n अंक 0 पर समाप्त होगी।

आप पिछली कक्षाओं में, यह पढ़ चुके हैं कि दो धनात्मक पूर्णांकों के HCF और LCM अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का प्रयोग करके किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। ऐसा करते समय, इस प्रमेय के नाम का उल्लेख नहीं किया गया था। इस विधि को *अभाज्य*

गुणनखंडन विधि (prime factorisation method) भी कहते हैं। आइए, एक उदाहरण की सहायता से इस विधि को पुन: याद करें।

उदाहरण 6 : संख्याओं 6 और 20 के अभाज्य गुणनखंडन विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $6 = 2^1 \times 3^1$ और $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ है।

जैसाकि आप पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं, आप HCF $(6, 20) = 2$ तथा LCM $(6, 20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$, ज्ञात कर सकते हैं।

ध्यान दीजिए कि HCF $(6, 20) = 2^1$ = **संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड की सबसे छोटी घात का गुणनफल** तथा

LCM $(6, 20) = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **संख्याओं में संबद्ध प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की सबसे बड़ी घात का गुणनफल**

उपरोक्त उदाहरण से आपने यह देख लिया होगा कि HCF $(6, 20) \times$ LCM $(6, 20) = 6 \times 20$ है। वास्तव में, अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का प्रयोग करके हम इसकी जाँच कर सकते हैं कि **किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए, HCF $(a, b) \times$ LCM $(a, b) = a \times b$ होता है।** इस परिणाम का प्रयोग करके, हम दो धनात्मक पूर्णांकों का LCM ज्ञात कर सकते हैं, यदि हमने उनका HCF पहले ही ज्ञात कर लिया है।

उदाहरण 7 : अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा 96 और 404 का HCF ज्ञात कीजिए और फिर इनका LCM ज्ञात कीजिए।

हल : 96 और 404 के अभाज्य गुणनखंडन से हमें प्राप्त होता है कि

$$96 = 2^5 \times 3, \quad 404 = 2^2 \times 101$$

इसलिए, इन दोनों पूर्णांकों का HCF $= 2^2 = 4$

साथ ही
$$\text{LCM}(96, 404) = \frac{96 \times 404}{\text{HCF}(96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

उदाहरण 8 : संख्या 6, 72 और 120 का अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल : हमें प्राप्त है:

$$6 = 2 \times 3, \quad 72 = 2^3 \times 3^2 \quad \text{तथा} \quad 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

2^1 और 3^1 प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड की सबसे छोटी घातें हैं।

अत:, $\quad$ HCF (6, 72, 120) = $2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

2^3, 3^2 और 5^1 प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की सबसे बड़ी घातें हैं, जो तीनों संख्याओं से संबद्ध हैं। ह

अत:, $\quad$ LCM (6, 72, 120) = $2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि $6 \times 72 \times 120 \neq$ HCF (6, 72, 120) × LCM (6, 72, 120), अर्थात् तीन संख्याओं का गुणनफल उनके HCF और LCM के गुणनफल के बराबर नहीं होता है।

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए:
   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429
2. पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है।
   (i) 26 और 91 (ii) 510 और 92 (iii) 336 और 54
3. अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णांकों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए:
   (i) 12, 15 और 21 (ii) 17, 23 और 29 (iii) 8, 9 और 25
4. HCF (306, 657) = 9 दिया है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।
5. जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है।
6. व्याख्या कीजिए कि $7 \times 11 \times 13 + 13$ और $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ भाज्य संख्याएँ क्यों हैं।
7. किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारंभ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुन: प्रारंभिक स्थान पर मिलेंगे?

1.4 अपरिमेय संख्याओं का पुनर्भ्रमण

कक्षा IX में, आपको अपरिमेय संख्याओं एवं उनके अनेक गुणों से परिचित कराया गया था। आपने इनके अस्तित्व के बारे में अध्ययन किया तथा यह देखा कि किस प्रकार परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ मिलकर वास्तविक संख्याएँ (real numbers) बनाती हैं। आपने यह भी सीखा था कि संख्या रेखा पर किस प्रकार अपरिमित संख्याओं के स्थान निर्धारित करते हैं। तथापि हमने यह सिद्ध नहीं किया था कि ये संख्याएँ अपरिमेय (irrationals) हैं। इस अनुच्छेद में, हम यह सिद्ध करेंगे कि $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ तथा, व्यापक रूप में, $\sqrt{p}$ अपरिमेय संख्याएँ हैं, जहाँ p एक अभाज्य संख्या है। अपनी उपपत्ति में, हम जिन प्रमेयों का प्रयोग करेंगे उनमें से एक है अंकगणित की आधारभूत प्रमेय।

याद कीजिए कि एक, संख्या 's' अपरिमेय संख्या कहलाती है, यदि उसे $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। अपरिमेय संख्याओं के कुछ उदाहरण, जिनसे आप परिचित हैं, निम्नलिखित हैं:

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots$, इत्यादि।

इससे पहले कि हम $\sqrt{2}$ को अपरिमेय संख्या सिद्ध करें, हमें निम्नलिखित प्रमेय की आवश्यकता पड़ेगी, जिसकी उपपत्ति अंकगणित की आधारभूत प्रमेय पर आधारित है।

प्रमेय 1.3 : *मान लीजिए p एक अभाज्य संख्या है। यदि p, a^2 को विभाजित करती है, तो p, a को भी विभाजित करेगी, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।*

***उपपत्ति :** मान लीजिए a के अभाज्य गुणनखंडन निम्नलिखित रूप के हैं: $a = p_1p_2 \ldots p_n$ जहाँ $p_1, p_2, \ldots p_n$ अभाज्य संख्याएँ हैं, परंतु आवश्यक रूप से भिन्न-भिन्न नहीं हैं।

अत:, $a^2 = (p_1p_2 \ldots p_n)(p_1p_2 \ldots p_n) = p_1^2p_2^2 \ldots p_n^2$

अब, हमें दिया है कि p, a^2 को विभाजित करती है। इसलिए, अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के अनुसार; p, a^2 का एक अभाज्य गुणनखंड है। परंतु अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता के गुण का प्रयोग करने पर, हम पाएँगे कि a^2 के अभाज्य गुणनखंड केवल p_1, $p_2, \ldots, p_n$ हैं। इसलिए p को $p_1, p_2, \ldots, p_n$ में से ही एक होना चाहिए।

अब, चूँकि $a = p_1 p_2 \ldots p_n$ है, इसलिए p, a को विभाजित अवश्य करेगा। ■

अब हम इसकी उपपत्ति दे सकते हैं कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

यह उपपत्ति उस तकनीक पर आधारित है जिसे 'विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति' (proof by contradiction) कहते हैं (इस तकनीक की कुछ विस्तृत रूप से चर्चा परिशिष्ट 1 में की गई है)।

प्रमेय 1.4 : $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उपपत्ति : हम इसके विपरीत यह मान लेते हैं कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अत:, हम दो पूर्णांक r और s ऐसे ज्ञात कर सकते हैं कि $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ हो तथा $s\ (\neq 0)$ हो।

मान लीजिए r और s में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड है। तब, हम इस

* यह परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

उभयनिष्ठ गुणनखंड से r और s को विभाजित करके $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ प्राप्त कर सकते हैं, जहाँ a और b सहअभाज्य (co-prime) हैं।

अत: $b\sqrt{2} = a$ हुआ।

दोनों पक्षों का वर्ग करने तथा पुनर्व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$2b^2 = a^2$$

अत: 2, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए प्रमेय 1.3 द्वारा 2, a को विभाजित करेगा।

अत: हम $a = 2c$ लिख सकते हैं, जहाँ c कोई पूर्णांक हैं।

a का मान प्रतिस्थापित करने पर हमें $2b^2 = 4c^2$, अर्थात् $b^2 = 2c^2$ प्राप्त होता है।

इसका अर्थ है कि 2, b^2 को विभाजित करता है और इसीलिए 2, b को भी विभाजित करेगा (प्रमेय 1.3 द्वारा $p = 2$ लेने पर)।

अत: a और b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 है।

परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

यह विरोधाभास हमें इस कारण प्राप्त हुआ है, क्योंकि हमने एक त्रुटिपूर्ण कल्पना कर ली है कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अत:, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। ■

उदाहरण 9 : $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : आइए हम इसके विपरीत यह मान लें कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात्, हम ऐसे दो पूर्णांक a और b $(\neq 0)$ प्राप्त कर सकते हैं कि $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ है।

यदि a और b में, 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड हो, तो हम उस उभयनिष्ठ गुणनखंड से भाग देकर a और b को सहअभाज्य बना सकते हैं।

अत: $b\sqrt{3} = a$ है।

दोनों पक्षों का वर्ग करने तथा पुनर्व्यवस्थित करने पर, हमें $3b^2 = a^2$ प्राप्त होता है।

अत: a^2, 3 से विभाजित है। इसलिए, प्रमेय 1.3 द्वारा 3, a को भी विभाजित करेगा।

अत: हम $a = 3c$ लिख सकते हैं, जहाँ c एक पूर्णांक है।

a के इस मान को $3b^2 = a^2$ में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$3b^2 = 9c^2 \text{ अर्थात् } b^2 = 3c^2$$

इसका अर्थ है कि b^2, 3 से विभाजित हो जाता है। इसलिए प्रमेय 1.3 द्वारा b भी 3 से विभाजित होगा।

अत: a और b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 3 है।

परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a और b सहअभाज्य हैं।

हमें यह विरोधाभास अपनी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण प्राप्त हुआ है कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। अत: हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

कक्षा IX में हमने बताया था कि:

- एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग या अंतर एक अपरिमेय संख्या होती है तथा
- एक शून्येतर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल एक अपरिमेय संख्या होती है।

यहाँ, हम उपरोक्त की कुछ विशिष्ट स्थितियाँ सिद्ध करेंगे।

उदाहरण 10 : दर्शाइए कि $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : आइए इसके विपरीत मान लें कि $5 - \sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात् हम सहअभाज्य ऐसी संख्याएँ a और b $(b \neq 0)$ ज्ञात कर सकते हैं कि $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ हो।

अत: $$5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3} \text{ है।}$$

इस समीकरण को पुनर्व्यवस्थित करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b}$$

चूँकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $5 - \frac{a}{b}$ एक परिमेय संख्या है अर्थात् $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हमें यह विरोधाभास अपनी गलत कल्पना के कारण प्राप्त हुआ है कि $5-\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $5-\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण 11 : दर्शाइए कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : आइए इसके विपरीत मान लें कि $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात् हम ऐसी सहअभाज्य संख्याएँ a और b $(b \neq 0)$ ज्ञात कर सकते हैं कि $3\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ हो।

पुनर्व्यवस्थित करने पर, हमें $\sqrt{2}=\frac{a}{3b}$ प्राप्त होगा।

चूँकि 3, a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a}{3b}$ एक परिमेय संख्या होगी। इसलिए $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्नावली 1.3

1. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।
2. सिद्ध कीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।
3. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं:

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6+\sqrt{2}$

1.5 परिमेय संख्याओं और उनके दशमलव प्रसारों का पुनर्भ्रमण

कक्षा IX में, आपने यह पढ़ा है कि परिमेय संख्याओं के या तो सांत दशमलव प्रसार (terminating decimal expansions) होते हैं या फिर असांत आवर्ती (non-terminating repeating) दशमलव प्रसार होते हैं। इस अनुच्छेद में हम एक परिमेय संख्या, मान लीजिए $\frac{p}{q}(q \neq 0)$, पर विचार करेंगे तथा यथार्थ रूप से इसकी खोज करेंगे कि $\frac{p}{q}$ का दशमलव प्रसार कब सांत होगा और कब असांत आवर्ती होगा। हम ऐसा कुछ उदाहरणों द्वारा करेंगे।

आइए निम्नलिखित परिमेय संख्याओं पर विचार करें:

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408

अब (i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

जैसा कि कोई आशा करेगा, इन सभी को ऐसी परिमेय संख्याओं के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जिनका हर 10 की कोई घात होगा। आइए अंश और हर में उभयनिष्ठ गुणनखंड को काट कर, यह देखने का प्रयत्न करें कि हमें क्या प्राप्त होता है।

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

क्या आप यहाँ कोई प्रतिरूप (Pattern) देख रहे हैं? ऐसा प्रतीत होता है कि हमने उस वास्तविक संख्या को जिसका दशमलव प्रसार एक सांत दशमलव है, एक $\frac{p}{q}$ के रूप की परिमेय संख्या में बदल लिया है, जहाँ p और q सहअभाज्य हैं तथा हर (अर्थात् q) में केवल 2 की घातें या 5 की घातें या दोनों की घातें हैं। हमें हर इसी प्रकार का दिखना चाहिए, क्योंकि 10 की घातों में केवल 2 और 5 की घातें ही गुणनखंड के रूप में होंगी।

यद्यपि हमने कुछ कम ही उदाहरण हल करके देखे हैं, फिर भी आप देख सकते हैं कि कोई भी वास्तविक संख्या, जिसका दशमलव प्रसार सांत है, एक ऐसी परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त की जा सकती है जिसका हर 10 की कोई घात है। साथ ही 10 के अभाज्य गुणनखंड केवल 2 और 5 ही हैं। अत: अंश और हर में से उभयनिष्ठ गुणनखंडों को काटकर, हम ज्ञात करते हैं कि यह वास्तविक संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप की एक ऐसी परिमेय संख्या है, जहाँ q का अभाज्य गुणनखंडन 2^n5^m के रूप का है तथा n और m कोई ऋणेतर (non-negative) पूर्णांक हैं।

आइए अपने परिणाम को औपचारिक रूप से लिखें:

प्रमेय 1.5 : *मान लीजिए x एक ऐसी परिमेय संख्या है जिसका दशमलव प्रसार सांत है। तब x को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q सहअभाज्य हैं तथा q का अभाज्य गुणनखंडन 2^n5^m के रूप का है, जहाँ n, m कोई ऋणेतर पूर्णांक हैं।*

आप संभवतः आश्चर्य कर रहे होंगे कि प्रमेय 1.5 का विलोम क्या होगा? अर्थात् यदि हमारे पास कोई परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप की है तथा q का अभाज्य गुणनखंडन 2^n5^m के रूप का है, जहाँ n और m ऋणेतर पूर्णांक हैं, तो क्या $\frac{p}{q}$ का दशमलव प्रसार सांत होगा?

आइए अब देखें कि क्या उपरोक्त कथन के सत्य होने के कोई स्पष्ट कारण हैं। आप निश्चय ही इस बात से सहमत होंगे कि $\frac{a}{b}$ के रूप की किसी भी परिमेय संख्या, जहाँ b, 10 की कोई घात है, का दशमलव प्रसार सांत होगा। अतः यह अर्थपूर्ण प्रतीत होता है कि $\frac{p}{q}$ के रूप की परिमेय संख्या, जहाँ q, 2^n5^m के रूप का है, को $\frac{a}{b}$ के ऐसे तुल्य (equivalent) परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त किया जाए, जहाँ b, 10 की कोई घात हो। आइए अपने ऊपर के उदाहरणों पर वापस लौट आएँ और विपरीत दिशा में कार्य करना प्रारंभ करें।

(i) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$

(ii) $\frac{13}{125} = \frac{13}{5^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{104}{10^3} = 0.104$

(iii) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$

(iv) $\frac{14588}{625} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4} = \frac{2^6 \times 7 \times 521}{2^4 \times 5^4} = \frac{233408}{10^4} = 23.3408$

अतः, ये उदाहरण यह दर्शाते हैं कि किस प्रकार $\frac{p}{q}$ के रूप की एक परिमेय संख्या, जहाँ q, 2^n5^m के रूप का है, को $\frac{a}{b}$ के ऐसे तुल्य (equivalent) परिमेय संख्या में बदला जा सकता है, जहाँ b, 10 की कोई घात है। अतः इस प्रकार की परिमेय संख्या का एक सांत दशमलव प्रसार होगा। आइए अपने परिणाम को औपचारिक रूप से लिखें।

प्रमेय 1.6 : *मान लीजिए $x = \frac{p}{q}$ जहाँ p और q सह-अभाज्य है, एक परिमेय संख्या ऐसी है कि q, 2^n5^m के रूप का है, जहाँ n और m ऋणेतर पूर्णांक हैं। तब x का दशमलव प्रसार सांत होता है।*

अब हम उन परिमेय संख्याओं की ओर बढ़ने को तैयार हैं जिनके दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होते हैं। एक बार फिर, हम एक उदाहरण लेकर देखते हैं कि इसमें क्या हो रहा है। हम कक्षा IX की पाठ्यपुस्तक के अध्याय 1 के उदाहरण 5 को लेते हैं, जिसमें $\frac{1}{7}$ का दशमलव प्रसार ज्ञात किया गया था। यहाँ शेष 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, . . . हैं और भाजक 7 है।

```
       0.1428571
   7 ) 10
        7
       (3)0
        28
        (2)0
         14
         (6)0
          56
          (4)0
           35
           (5)0
            49
            (1)0
              7
             (3)0
```

ध्यान दीजिए कि यहाँ हर 7 स्पष्ट रूप से 2^n5^m के रूप का नहीं है। अत:, प्रमेयों 1.5 और 1.6 से, $\frac{1}{7}$ का दशमलव प्रसार सांत नहीं होगा। यहाँ 0 शेष के रूप में नहीं प्रकट होगा (क्यों?) तथा एक स्थिति के बाद, शेषफलों की पुनरावृत्ति प्रारंभ हो जाएगी। इसीलिए $\frac{1}{7}$ के भागफल में अंकों के एक ब्लॉक अर्थात् 142857 की पुनरावृत्ति होगी।

हमने $\frac{1}{7}$ के दशमलव प्रसार में जो देखा है वह उन सभी परिमेय संख्याओं के लिए सत्य है जो प्रमेयों 1.5 और 1.6 के अंतर्गत नहीं आती हैं। इस प्रकार की संख्याओं के लिए हम प्राप्त करते हैं:

प्रमेय 1.7 : *मान लीजिए $x = \frac{p}{q}$ जहाँ p और q सह-अभाज्य हैं, एक परिमेय संख्या इस प्रकार की है कि q का अभाज्य गुणनखंडन 2^n5^m के रूप का नहीं है, जहाँ n, m ऋणेतर पूर्णांक हैं। तब x का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होता है।*

उपरोक्त चर्चा के आधार पर, हम यह कह सकते हैं कि किसी परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत होता है या असांत आवर्ती है।

प्रश्नावली 1.4

1. बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया किए बताइए कि निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत हैं या असांत आवर्ती हैं:

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$

(iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$ (vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$

(vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$ (ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

2. ऊपर दिए गए प्रश्न में उन परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसारों को लिखिए जो सांत हैं।

3. कुछ वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार नीचे दर्शाए गए हैं। प्रत्येक स्थिति के लिए निर्धारित कीजिए कि यह संख्या परिमेय संख्या है या नहीं। यदि यह परिमेय संख्या है और $\frac{p}{q}$ के रूप की है तो q के अभाज्य गुणनखंडों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

   (i) 43.123456789 (ii) 0.120120012000120000... (iii) $43.\overline{123456789}$

1.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका:

   दो धनात्मक पूर्णांक a और b दिए रहने पर, हम $a = bq + r, 0 \le r < b$ को संतुष्ट करने वाली पूर्ण संख्याएँ q और r ज्ञात कर सकते हैं अर्थात् ऐसी संख्याओं का अस्तित्व है।

2. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म: यह यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका पर आधारित है। इसका प्रयोग कर दो धनात्मक पूर्णांकों a और b, $(a > b)$ का HCF नीचे दर्शाई विधि द्वारा प्राप्त किया जाता है:

   चरण 1 : q और r ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कीजिए, जहाँ $a = bq + r, 0 \le r < b$ है।

   चरण 2 : यदि $r = 0$ है तो HCF = b है। यदि $r \ne 0$ है तो b और r पर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग कीजिए।

   चरण 3 : इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक शेषफल शून्य न प्राप्त हो जाए। इस स्थिति वाला भाजक ही HCF (a, b) है। साथ ही, HCF (a, b) = HCF (b, r)

3. अंकगणित की आधारभूत प्रमेय:

   प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता है तथा यह गुणनखंडन अद्वितीय (Unique) होता है, इस पर कोई ध्यान दिए बिना कि अभाज्य गुणनखंड किस क्रम में आ रहे हैं।

4. यदि p कोई अभाज्य संख्या है और p, a^2 को विभाजित करता है तो p, a को भी विभाजित करेगा, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।

5. उपपत्ति कि $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ इत्यादि अपरिमेय संख्याएँ हैं।

6. मान लीजिए x एक परिमेय संख्या है जिसका दशमलव प्रसार सांत है। तब, हम x को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ p और q सहअभाज्य हैं तथा q का अभाज्य गुणनखंडन 2^n5^m के रूप का है, जहाँ n, m ऋणेतर पूर्णांक हैं।

7. मान लीजिए $x = \frac{p}{q}$ एक ऐसी परिमेय संख्या है कि q का अभाज्य गुणनखंडन $2^n 5^m$ के रूप का है, जहाँ n, m ऋणेतर पूर्णांक हैं तो x का दशमलव प्रसार सांत होगा।

8. मान लीजिए $x = \frac{p}{q}$ एक ऐसी परिमेय संख्या है कि q का अभाज्य गुणनखंडन $2^n\ 5^m$ के रूप का नहीं है, जहाँ n, m ऋणेतर पूर्णांक हैं तो x का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होगा।

पाठकों के लिए विशेष

आपने देखा कि:

HCF $(p, q, r) \times$ LCM $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, जहाँ p, q, r धनात्मक पूर्णांक हैं (उदाहरण 8 देखिए)। जबकि निम्न परिणाम तीन संख्याओं p, q और r पर लागू होता है:

$$\text{LCM}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{HCF}(p, q, r)}{\text{HCF}(p, q) \cdot \text{HCF}(q, r) \cdot \text{HCF}(p, r)}$$

$$\text{HCF}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{LCM}(p, q, r)}{\text{LCM}(p, q) \cdot \text{LCM}(q, r) \cdot \text{LCM}(p, r)}$$

1063CH02

बहुपद (Polynomials) 2

2.1 भूमिका

कक्षा IX में, आपने एक चर वाले बहुपदों (polynomials) एवं उनकी घातों (degree) के बारे में अध्ययन किया है। याद कीजिए कि चर x के बहुपद $p(x)$ में x की उच्चतम घात (power) **बहुपद की घात (degree)** कहलाती है। उदाहरण के लिए, $4x + 2$ चर x में घात 1 का बहुपद है, $2y^2 - 3y + 4$ चर y में घात 2 का बहुपद है, $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ चर x में घात 3 का बहुपद है और $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ चर u में घात 6 का बहुपद है। व्यंजक $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ इत्यादि बहुपद नहीं हैं।

घात 1 के बहुपद को **रैखिक बहुपद (linear polynomial)** कहते हैं। उदाहरण के लिए, $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$, $y + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$, इत्यादि सभी रैखिक बहुपद हैं। जबकि $2x + 5 - x^2$, $x^3 + 1$, आदि प्रकार के बहुपद रैखिक बहुपद नहीं हैं।

घात 2 के बहुपद को **द्विघात बहुपद (quadratic polynomial)** कहते हैं। द्विघात (quadratic) शब्द क्वाड्रेट (quadrate) शब्द से बना है, जिसका अर्थ है 'वर्ग'। $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$, द्विघात बहुपदों के कुछ उदाहरण हैं (जिनके गुणांक वास्तविक संख्याएँ हैं)। अधिक व्यापक रूप में, x में कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है, के प्रकार का होता है। घात 3 का बहुपद **त्रिघात बहुपद (cubic polynomial)** कहलाता है। त्रिघात बहुपद के कुछ उदाहरण हैं:

$$2 - x^3,\ x^3,\ \sqrt{2}\,x^3,\ 3 - x^2 + x^3,\ 3x^3 - 2x^2 + x - 1$$

वास्तव में, त्रिघात बहुपद का सबसे व्यापक रूप है:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

जहाँ a, b, c, d वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है।

अब बहुपद $p(x) = x^2 - 3x - 4$ पर विचार कीजिए। इस बहुपद में $x = 2$ रखने पर हम $p(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 4 = -6$ पाते हैं। $x^2 - 3x - 4$ में, x को 2 से प्रतिस्थापित करने से प्राप्त मान '-6', $x^2 - 3x - 4$ का $x = 2$ पर मान कहलाता है। इसी प्रकार $p(0)$, $p(x)$ का $x = 0$ पर मान है, जो -4 है।

यदि $p(x)$, x में कोई बहुपद है और k कोई वास्तविक संख्या है, तो $p(x)$ में x को k से प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त वास्तविक संख्या **$p(x)$ का $x = k$ पर मान** कहलाती है और इसे $p(k)$ से निरूपित करते हैं।

$p(x) = x^2 - 3x - 4$ का $x = -1$ पर क्या मान है? हम पाते हैं :

$$p(-1) = (-1)^2 - \{3 \times (-1)\} - 4 = 0$$

साथ ही, ध्यान दीजिए कि $p(4) = 4^2 - (3 \times 4) - 4 = 0$ है।

क्योंकि $p(-1) = 0$ और $p(4) = 0$ है, इसलिए -1 और 4 द्विघात बहुपद $x^2 - 3x - 4$ के शून्यक (zeroes) कहलाते हैं। अधिक व्यापक रूप में, एक वास्तविक संख्या k बहुपद **$p(x)$** का शून्यक कहलाती है, यदि $p(k) = 0$ है।

आप कक्षा IX में पढ़ चुके हैं कि किसी रैखिक बहुपद का शून्यक कैसे ज्ञात किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि $p(x) = 2x + 3$ का शून्यक k है, तो $p(k) = 0$ से, हमें $2k + 3 = 0$ अर्थात् $k = -\frac{3}{2}$ प्राप्त होता है।

व्यापक रूप में, यदि $p(x) = ax + b$ का एक शून्यक k है, तो $p(k) = ak + b = 0$, अर्थात् $k = \frac{-b}{a}$ होगा। अतः, रैखिक बहुपद $ax + b$ का शून्यक $\frac{-b}{a} = \frac{-\text{(अचर पद)}}{x \text{ का गुणांक}}$ है।

इस प्रकार, रैखिक बहुपद का शून्यक उसके गुणांकों से संबंधित है। क्या यह अन्य बहुपदों में भी होता है? उदाहरण के लिए, क्या द्विघात बहुपद के शून्यक भी उसके गुणांकों से संबंधित होते हैं?

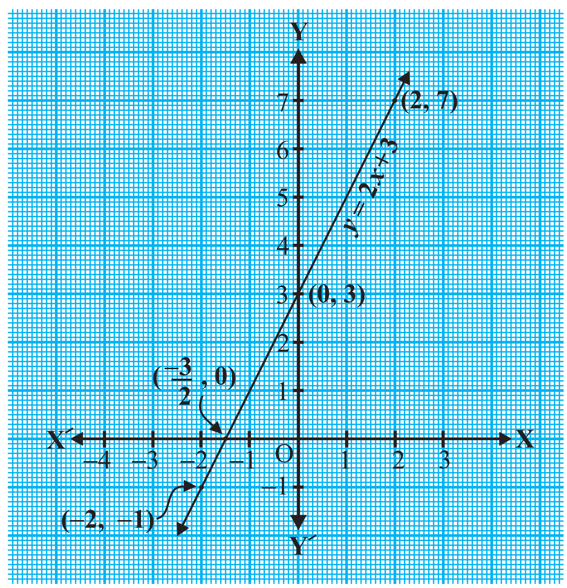
इस अध्याय में, हम इन प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयत्न करेंगे। हम बहुपदों के लिए विभाजन कलन विधि (division algorithm) का भी अध्ययन करेंगे।

2.2 बहुपद के शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical meaning of the Zeroes of a Polynomial)

आप जानते हैं कि एक वास्तविक संख्या k बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक है, यदि $p(k) = 0$ है। परंतु किसी बहुपद के शून्यक इतने आवश्यक क्यों हैं? इसका उत्तर देने के लिए, सर्वप्रथम हम रैखिक और द्विघात बहुपदों के **आलेखीय** निरूपण देखेंगे और फिर उनके शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ देखेंगे।

पहले एक रैखिक बहुपद $ax + b$, $a \neq 0$ पर विचार करते हैं। आपने कक्षा IX में पढ़ा है कि $y = ax + b$ का ग्राफ (आलेख) एक सरल रेखा है। उदाहरण के लिए, $y = 2x + 3$ का ग्राफ बिंदुओं $(-2, -1)$ तथा $(2, 7)$ से जाने वाली एक सरल रेखा है।

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7



आकृति 2.1

आकृति 2.1 से आप देख सकते हैं कि $y = 2x + 3$ का ग्राफ x–अक्ष को $x = -1$ तथा $x = -2$ के बीचो बीच, अर्थात् बिंदु $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ पर प्रतिच्छेद करता है। आप यह भी जानते हैं कि $2x + 3$ का शून्यक $-\frac{3}{2}$ है। अत: बहुपद $2x + 3$ का शून्यक उस बिंदु का x-निर्देशांक है, जहाँ $y = 2x + 3$ का ग्राफ x-अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

व्यापक रूप में, एक रैखिक बहुपद $ax + b$, $a \neq 0$ के लिए, $y = ax + b$ का ग्राफ एक सरल रेखा है, जो x-अक्ष को ठीक एक बिंदु $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ पर प्रतिच्छेद करती है। अत:, रैखिक बहुपद $ax + b$, $a \neq 0$ का केवल एक शून्यक है, जो उस बिंदु का x–निर्देशांक है, जहाँ $y = ax + b$ का ग्राफ x–अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

अब आइए हम द्विघात बहुपद के किसी शून्यक का ज्यामितीय अर्थ जाने। द्विघात बहुपद $x^2 - 3x - 4$ पर विचार कीजिए। आइए देखें कि $y = x^2 - 3x - 4$ का ग्राफ* किस प्रकार

* द्विघात या त्रिघात बहुपदों के ग्राफ खींचना विद्यार्थियों के लिए अपेक्षित नहीं है और न ही इनका मूल्यांकन से संबंध है।

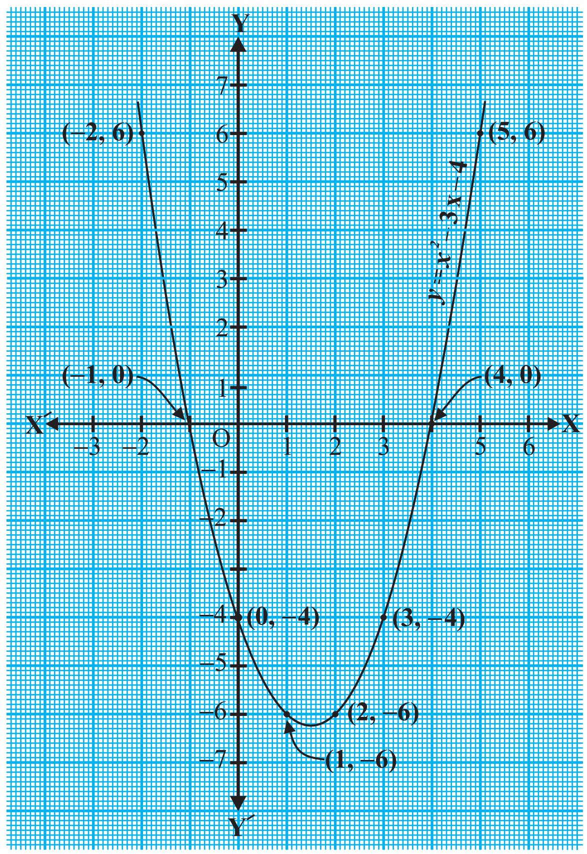
का दिखता है। हम x के कुछ मानों के संगत $y = x^2 - 3x - 4$ के कुछ मानों को लेते हैं, जैसे सारणी 2.1 में दिए हैं।

सारणी 2.1

x	– 2	–1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	– 4	– 6	– 6	– 4	0	6

यदि हम उपर्युक्त बिंदुओं को एक ग्राफ पेपर पर अंकित करें और ग्राफ खींचें, तो यह आकृति 2.2 में दिए गए जैसा दिखेगा।

वास्तव में किसी द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ के लिए संगत समीकरण $y = ax^2 + bx + c$ के ग्राफ का आकार या तो ऊपर की ओर खुला $\cup$ की तरह अथवा नीचे की ओर खुला $\cap$ की तरह का होगा, जो इस पर निर्भर करेगा कि $a > 0$ है या $a < 0$ है (इन वक्रों को **परवलय (parabola)** कहते हैं)।



आकृति 2.2

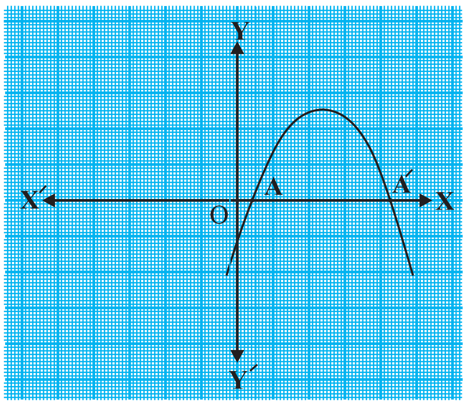
सारणी 2.1 से आप देख सकते हैं कि द्विघात बहुपद के शून्यक –1 तथा 4 हैं। इस पर भी ध्यान दीजिए कि –1 तथा 4 उन बिंदुओं के x–निर्देशांक हैं, जहाँ $y = x^2 - 3x - 4$ का ग्राफ x–अक्ष को प्रतिच्छेद करता है। इस प्रकार, द्विघात बहुपद $x^2 - 3x - 4$ के शून्यक उन बिंदुओं के x–निर्देशांक हैं, जहाँ $y = x^2 - 3x - 4$ का ग्राफ x–अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

यह तथ्य सभी द्विघात बहुपदों के लिए सत्य है, अर्थात् द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ के शून्यक उन बिंदुओं के x–निर्देशांक हैं, जहाँ $y = ax^2 + bx + c$ को निरूपित करने वाला परवलय x–अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

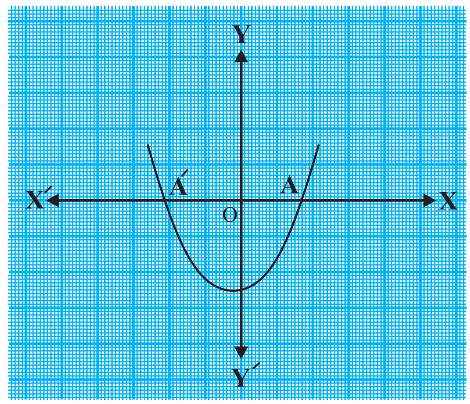
$y = ax^2 + bx + c$ के ग्राफ के आकार का प्रेक्षण करने से तीन निम्नलिखित स्थितियाँ संभावित हैं।

स्थिति (i) : यहाँ ग्राफ x-अक्ष को दो भिन्न बिंदुओं A और A′ पर काटता है।

इस स्थिति में, A और A′ के x–निर्देशांक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के **दो शून्यक** हैं (देखिए आकृति 2.3)।



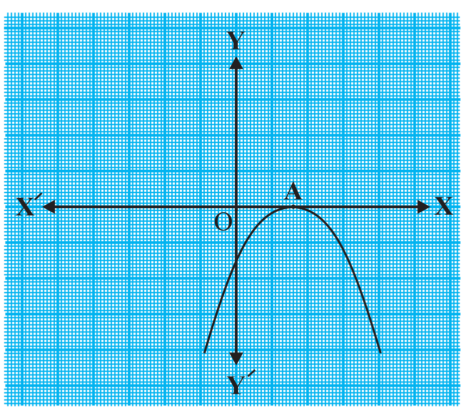
(i)



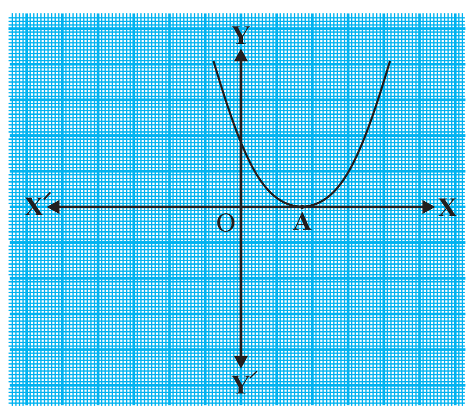
(ii)

आकृति 2.3

स्थिति (ii) : यहाँ ग्राफ x-अक्ष को केवल एक बिंदु पर, अर्थात् दो संपाती बिंदुओं पर काटता है। इसलिए, स्थिति (i) के दो बिंदु A और A′ यहाँ पर संपाती होकर एक बिंदु A हो जाते हैं (देखिए आकृति 2.4)।



(i)

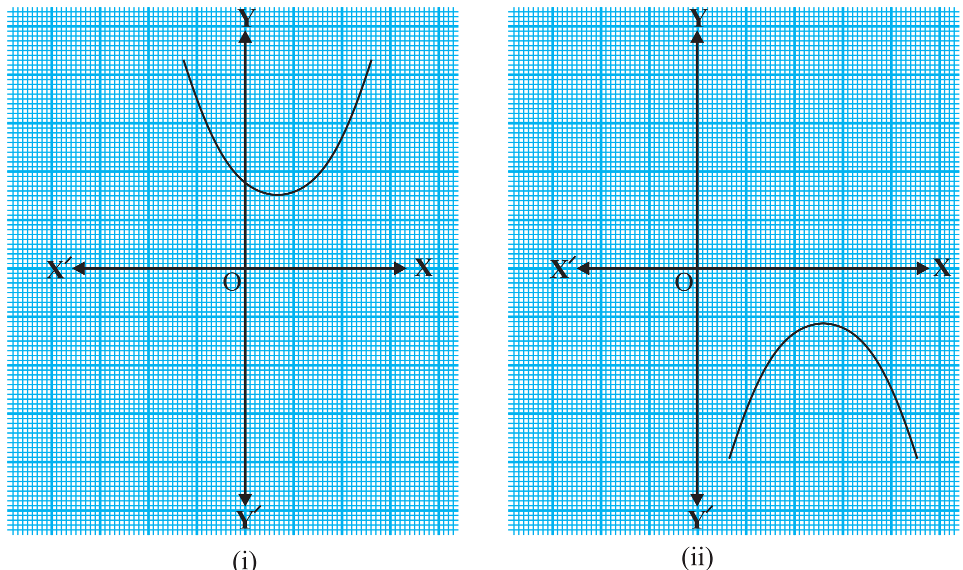


(ii)

आकृति 2.4

इस स्थिति में, A का x–निर्देशांक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ का **केवल एक शून्यक** है।

स्थिति (iii) : यहाँ ग्राफ या तो पूर्ण रूप से x–अक्ष के ऊपर या पूर्ण रूप से x–अक्ष के नीचे है। इसलिए, यह x–अक्ष को कहीं पर नहीं काटता है (देखिए आकृति 2.5)।



आकृति 2.5

अत:, इस स्थिति में द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ का **कोई शून्यक नहीं** है।

इस प्रकार, आप ज्यामितीय रूप में देख सकते हैं कि किसी द्विघात बहुपद के दो भिन्न शून्यक, या दो बराबर शून्यक (अर्थात् एक शून्यक) या कोई भी शून्यक नहीं, हो सकते हैं। इसका यह भी अर्थ है कि घात 2 के किसी बहुपद के अधिकतम दो शून्यक हो सकते हैं।

अब आप एक त्रिघात बहुपद के शून्यकों के ज्यामितीय अर्थ के बारे में क्या आशा कर सकते हैं? आइए इसे ज्ञात करें। त्रिघात बहुपद $x^3 - 4x$ पर विचार कीजिए। इसे देखने के लिए कि $y = x^3 - 4x$ का ग्राफ कैसा लगता है, आइए x के कुछ मानों के संगत y के कुछ मानों को सारणी 2.2 में सूचीबद्ध करें।

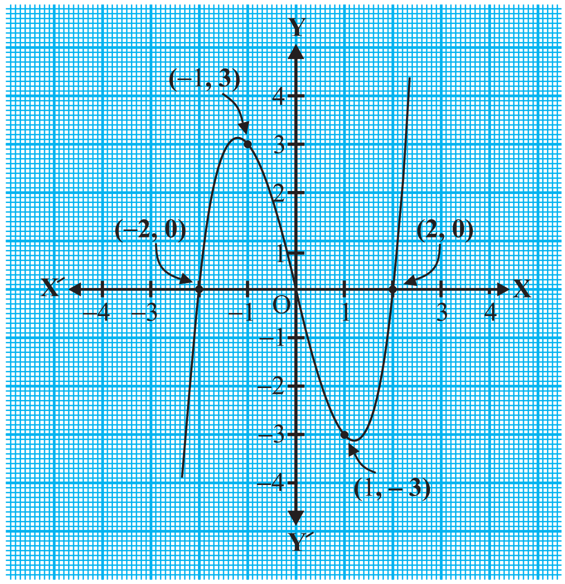
सारणी 2.2

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	–3	0

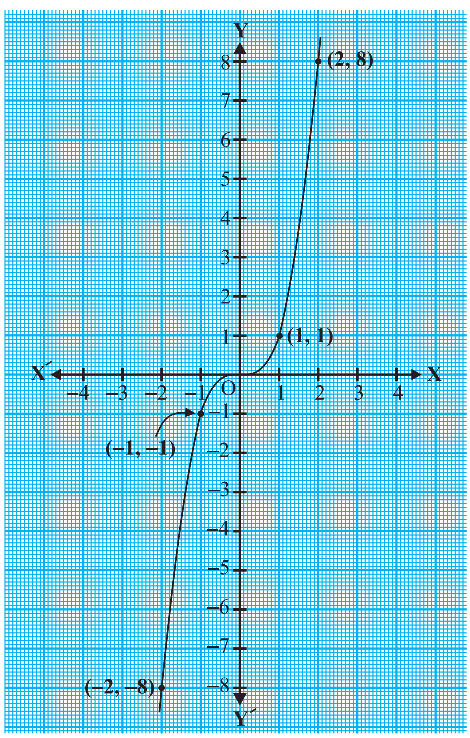
सारणी के बिंदुओं को एक ग्राफ पेपर पर अंकित करने और ग्राफ खींचने पर, हम देखते हैं कि $y = x^3 - 4x$ का ग्राफ वास्तव में आकृति 2.6 जैसा दिखता है।

उपर्युक्त सारणी से हम देखते हैं कि त्रिघात बहुपद $x^3 - 4x$ के शून्यक -2, 0 और 2 हैं। ध्यान दीजिए कि -2, 0 और 2 वास्तव में उन बिंदुओं के x–निर्देशांक हैं, जहाँ $y = x^3 - 4x$ का ग्राफ x–अक्ष को प्रतिच्छेद करता है। क्योंकि वक्र x–अक्ष को केवल इन्हीं तीन बिंदुओं पर काटता है, इसलिए बहुपद के शून्यक केवल इन्हीं बिंदुओं के x–निर्देशांक हैं।

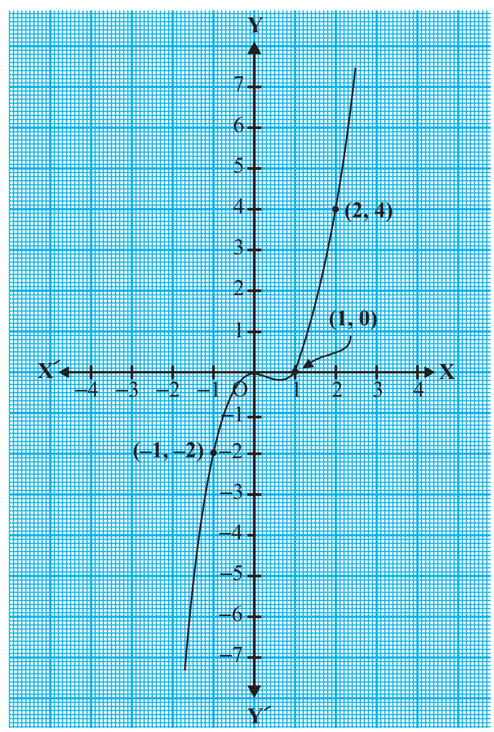
अब हम कुछ अन्य उदाहरण लेते हैं। त्रिघात बहुपदों x^3 और $x^3 - x^2$ पर विचार कीजिए। हम $y = x^3$ तथा $y = x^3 - x^2$ के ग्राफ क्रमशः आकृति 2.7 और आकृति 2.8 में खींचते हैं।



आकृति 2.6



आकृति 2.7



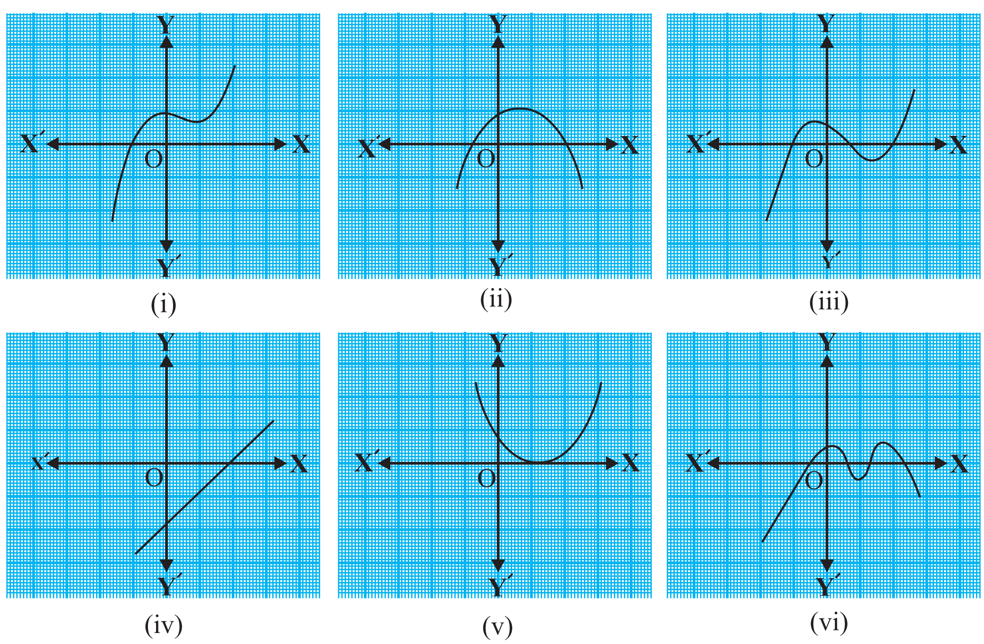
आकृति 2.8

ध्यान दीजिए कि बहुपद x^3 का केवल एक शून्यक 0 है। आकृति 2.7 से भी आप देख सकते हैं कि 0 केवल उस बिंदु का x–निर्देशांक है, जहाँ $y = x^3$ का ग्राफ x–अक्ष को प्रतिच्छेद करता है। इसी प्रकार, क्योंकि $x^3 - x^2 = x^2 (x - 1)$ है, इसलिए बहुपद $x^3 - x^2$ के शून्यक केवल 0 और 1 हैं। आकृति 2.8 से भी ये मान केवल उन बिंदुओं के x–निर्देशांक हैं, जहाँ $y = x^3 - x^2$ का ग्राफ x–अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

उपर्युक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि किसी त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक 3 शून्यक हो सकते हैं। दूसरे शब्दों में, घात 3 के किसी बहुपद के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं।

टिप्पणी : व्यापक रूप में, घात n के दिए गए बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ x–अक्ष को अधिक से अधिक n बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करता है। अत: घात n के किसी बहुपद के अधिक से अधिक n शून्यक हो सकते हैं।

उदाहरण 1 : नीचे दी गई आकृति 2.9 में, ग्राफों को देखिए। प्रत्येक आकृति $y = p(x)$, जहाँ $p(x)$ एक बहुपद है, का ग्राफ है। ग्राफों से प्रत्येक के लिए, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।



आकृति 2.9

हल :

(i) शून्यकों की संख्या 1 है, क्योंकि ग्राफ x–अक्ष को केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करता है।

(ii) शून्यकों की संख्या 2 है, क्योंकि ग्राफ x-अक्ष को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करता है।

(iii) शून्यकों की संख्या 3 है। (क्यों?)

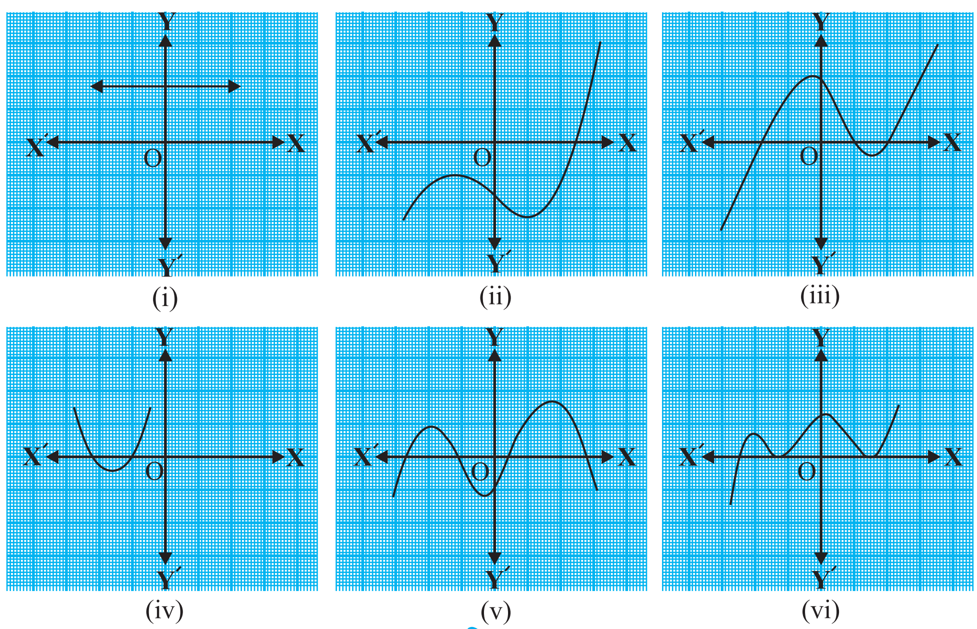
(iv) शून्यकों की संख्या 1 है। (क्यों?)

(v) शून्यकों की संख्या 1 है। (क्यों?)

(vi) शून्यकों की संख्या 4 है। (क्यों?)

प्रश्नावली 2.1

1. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति 2.10 में दिया है। प्रत्येक स्थिति में, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।



आकृति 2.10

2.3 किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध

आप पहले ही देख चुके हैं कि रैखिक बहुपद $ax + b$ का शून्यक $-\frac{b}{a}$ होता है। अब हम किसी द्विघात बहुपद के शून्यकों और उसके गुणांकों के संबंध में अनुच्छेद 2.1 में

उठाए गए प्रश्न का उत्तर देने का प्रयत्न करेंगे। इसके लिए एक द्विघात बहुपद माना $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ लीजिए। कक्षा IX में, आप सीख चुके हैं कि मध्य पद को विभक्त करके कैसे किसी द्विघात बहुपद के गुणनखंड किए जाते हैं। इसलिए, यहाँ हमें मध्य पद '$- 8x$' को दो ऐसे पदों के योग के रूप में विभक्त करना है जिनका गुणनफल $6 \times 2x^2 = 12x^2$ हो। अत:, हम लिखते हैं:

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x - 3) - 2(x - 3)$$
$$= (2x - 2)(x - 3) = 2(x - 1)(x - 3)$$

इसलिए, $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ का मान शून्य है, जब $x - 1 = 0$ या $x - 3 = 0$ है, अर्थात् जब $x = 1$ या $x = 3$ हो। अत:, $2x^2 - 8x + 6$ के शून्यक 1 और 3 हैं। ध्यान दीजिए :

$$\text{शून्यकों का योग} = 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

आइए, एक और द्विघात बहुपद, माना $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ लें। मध्य पद के विभक्त करने की विधि से,

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) - 1(x + 2)$$
$$= (3x - 1)(x + 2)$$

अत:, $3x^2 + 5x - 2$ का मान शून्य होगा यदि या तो $3x - 1 = 0$ हो या $x + 2 = 0$ हो, अर्थात् जब $x = \frac{1}{3}$ हो या $x = -2$ हो। इसलिए, $3x^2 + 5x - 2$ के शून्यक $\frac{1}{3}$ और -2 हैं। ध्यान दीजिए:

$$\text{शून्यकों का योग} = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

व्यापक रूप में, यदि * α, β द्विघात बहुपद $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ के शून्यक हों, तो आप जानते हैं कि $x - \alpha$ और $x - \beta$, $p(x)$ के गुणनखंड होते हैं। अत:,

$$ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta), \text{ जहाँ } k \text{ एक अचर है}$$
$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$
$$= kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$$

* α, β यूनानी भाषा के अक्षर हैं, जिन्हें क्रमश: अल्फा, बीटा द्वारा उच्चरित किया जाता है। बाद में हम एक और अक्षर γ का प्रयोग करेंगे, जिसे 'गामा' से उच्चरित किया जाता है।

दोनों ओर के x^2, x के गुणांकों तथा अचर पदों की तुलना करने पर, हम पाते हैं:

$$a = k,\ b = -k(\alpha + \beta) \text{ और } c = k\alpha\beta$$

इससे प्राप्त होता है: $$\boldsymbol{\alpha + \beta = \frac{-b}{a}}$$

$$\boldsymbol{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$$

अर्थात् $$\text{शून्यकों का योग} = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 2 : द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : हम पाते हैं:

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

इसलिए $x^2 + 7x + 10$ का मान शून्य है, जब $x + 2 = 0$ है या $x + 5 = 0$ है, अर्थात् जब $x = -2$ या $x = -5$ हो। इसलिए, $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक -2 और -5 हैं। अब,

$$\text{शून्यकों का योग} = -2 + (-5) = -(7) = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = (-2) \times (-5) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

उदाहरण 3 : बहुपद $x^2 - 3$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ का स्मरण कीजिए। इसे प्रयोग कर, हम लिख सकते हैं:

$$x^2 - 3 = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$$

इसलिए, $x^2 - 3$ का मान शून्य होगा, जब $x = \sqrt{3}$ हो या $x = -\sqrt{3}$ हो।

अत:, $x^2 - 3$ के शून्यक $\sqrt{3}$ और $-\sqrt{3}$ हैं। अब,

$$\text{शून्यकों का योग} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \left(\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}\right) = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

उदाहरण 4 : एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः -3 और 2 हैं।

हल : माना द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β हैं।

हम पाते हैं: $$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a}$$

और $$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$$

यदि $a = 1$ है, तो $b = 3$ और $c = 2$ होगा।

अतः, एक द्विघात बहुपद, जिसमें दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 + 3x + 2$ है।

आप जाँच कर सकते हैं कि अन्य कोई द्विघात बहुपद, जो इन शर्तों को संतुष्ट करता हो, $k(x^2 + 3x + 2)$ की तरह का होगा, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।

आइए अब हम त्रिघात बहुपद की ओर दृष्टिपात करें। क्या आप सोचते हैं कि त्रिघात बहुपद के शून्यकों और उसके गुणांकों के बीच इसी प्रकार का संबंध होता है?

आइए $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ पर विचार करें।

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि $x = 4, -2$ और $\frac{1}{2}$ के लिए $p(x) = 0$ है। क्योंकि $p(x)$ के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं, इसलिए $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ के यही शून्यक हैं। अब,

$$\text{शून्यकों का योग} = 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}},$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-\text{अचर पद}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

परंतु, यहाँ एक और संबंध भी है। दो शून्यकों को एक साथ लेकर उनके गुणनफलों के योग पर विचार करें। हम पाते हैं :

$$\{4\times(-2)\}+\left\{(-2)\times\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{2}\times 4\right\}$$

$$= -8-1+2=-7=\frac{-14}{2} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

व्यापक रूप में, यह सिद्ध किया जा सकता है कि यदि α, β, γ त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हों, तो

$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}}$$

$$\boldsymbol{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}}$$

तथा $$\boldsymbol{\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}}$$

आइए एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 5* : जाँच कीजिए कि त्रिघात बहुपद $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ के शून्यक 3, –1 और $-\frac{1}{3}$ हैं। इसके पश्चात् शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : दिए हुए बहुपद की $ax^3 + bx^2 + cx + d$ से तुलना करने पर, हम पाते हैं:

$a = 3, b = -5, c = -11, d = -3$ है। पुनः,

$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0$

$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11\times\left(-\frac{1}{3}\right) - 3$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

अतः, $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ के शून्यक 3, –1 और $-\frac{1}{3}$ हैं।

* यह परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

इसलिए, हम $\alpha = 3, \beta = -1$ और $\gamma = -\frac{1}{3}$ लेते हैं। अब,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a}$$

और $\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}$ है।

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए :

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$

(iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमश: दी गई संख्याएँ हैं:

(i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

(iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

2.4 बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म

आप जानते हैं कि एक त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं। परंतु, यदि आपको केवल एक शून्यक दिया हो, तो क्या आप अन्य दो शून्यक ज्ञात कर सकते हैं? इसके लिए, आइए त्रिघात बहुपद $x^3 - 3x^2 - x + 3$ पर विचार करें। यदि हम आपको बताएँ कि उसका एक शून्यक 1 है, तो आप जानते हैं कि $x^3 - 3x^2 - x + 3$ का एक गुणनखंड $x - 1$ है। इसलिए आप $x^3 - 3x^2 - x + 3$ को $x - 1$ से भाग देकर भागफल $x^2 - 2x - 3$ प्राप्त कर सकते हैं।

अब आप मध्य पद को विभक्त करके $x^2 - 2x - 3$ के गुणनखंड $(x + 1)(x - 3)$ प्राप्त कर सकते हैं। अर्थात्

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x^2 - 2x - 3)$$
$$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)$$

इसलिए त्रिघात बहुपद के सभी शून्यक 1, – 1 और 3 हैं।

आइए अब एक बहुपद को दूसरे बहुपद से भाग देने के एल्गोरिथ्म (कलन विधि) की

विवेचना कुछ विस्तार से करें। विधिवत चरणों पर ध्यान देने से पूर्व, एक उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 6 : $2x^2 + 3x + 1$ को $x + 2$ से भाग दीजिए।

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x - 1 \\
\hline
x + 2 & 2x^2 + 3x + 1 \\
 & \underline{\overset{-}{2x^2} \overset{-}{+} 4x} \\
 & \qquad -x + 1 \\
 & \qquad \underline{\overset{+}{-x} \overset{+}{-} 2} \\
 & \qquad\qquad 3
\end{array}
$$

हल : ध्यान दीजिए कि जब शेषफल या तो शून्य हो जाए या इसकी घात भाजक की घात से कम हो जाए, तो हम भाग देने की प्रक्रिया को रोक देते हैं। इसलिए, यहाँ भागफल $2x - 1$ है तथा शेषफल 3 है। इसके अतिरिक्त,

$(2x - 1)(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$

अर्थात्, $2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x - 1) + 3$

अत:, भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

अब हम यह प्रक्रिया किसी बहुपद को एक द्विघात बहुपद से भाग देने के लिए विस्तृत करते हैं।

उदाहरण 7 : $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ को $1 + 2x + x^2$ से भाग दीजिए।

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 3x - 5 \\
\hline
x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\
 & \underline{\overset{-}{3x^3} \overset{-}{+} 6x^2 \overset{-}{+} 3x} \\
 & \quad -5x^2 - x + 5 \\
 & \quad \underline{\overset{+}{-5x^2} \overset{+}{-} 10x \overset{+}{-} 5} \\
 & \qquad\quad 9x + 10
\end{array}
$$

हल : हम सर्वप्रथम भाजक एवं भाज्य के पदों को घटती हुई घातों के क्रम में व्यवस्थित करते हैं। याद कीजिए कि बहुपदों के पद इस प्रकार व्यवस्थित करने को बहुपद को मानक रूप में लिखना कहते हैं। इस उदाहरण में, भाज्य पहले से ही मानक रूप में है तथा मानक रूप में भाजक $x^2 + 2x + 1$ है।

चरण 1 : भागफल का पहला पद प्राप्त करने के लिए, उच्चतम घात वाले पद (अर्थात् $3x^3$) को भाजक के उच्चतम घात वाले पद (अर्थात् x^2) से भाग दीजिए। यह $3x$ है। तब, भाग देने की प्रक्रिया कीजिए। जो शेष बचता है वह $-5x^2 - x + 5$ है।

चरण 2 : अब भागफल का दूसरा पद ज्ञात करने के लिए, नए भाज्य के उच्चतम घात वाले पद (अर्थात् $-5x^2$) को भाजक के उच्चतम घात वाले पद (अर्थात् x^2) से भाग कीजिए। इससे -5 मिलता है। पुन: भाग देने की प्रक्रिया $-5x^2 - x + 5$ के साथ कीजिए।

चरण 3 : अब शेष बचे $9x + 10$ की घात भाजक $x^2 + 2x + 1$ की घात से कम है। इसलिए, हम भाग देने की क्रिया को और नहीं कर सकते हैं।

इसलिए, भागफल $3x - 5$ है तथा शेषफल $9x + 10$ है। इसके अतिरिक्त,

$$
\begin{aligned}
(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) &= 3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10 \\
&= 3x^3 + x^2 + 2x + 5
\end{aligned}
$$

यहाँ हम पुन: देखते हैं कि

$$\text{भाज्य} = \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल}$$

हम यहाँ जिस एल्गोरिथ्म का प्रयोग कर रहे हैं वह यूक्लिड की विभाजन एल्गोरिथ्म, जिसे आप अध्याय 1 में पढ़ चुके हैं, जैसी है। इसके अनुसार

यदि $p(x)$ और $g(x)$ कोई दो बहुपद हैं जहाँ $g(x) \neq 0$ हो तो हम बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ ऐसे प्राप्त कर सकते हैं कि

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

जहाँ $r(x) = 0$ है अथवा $r(x)$ की घात < $g(x)$ की घात है।

यह निष्कर्ष बहुपदों के लिए **विभाजन एल्गोरिथ्म** कहलाता है।

इसके उपयोग को दर्शाने के लिए, आइए कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 8 : $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ को $x - 1 - x^2$ से भाग दीजिए और विभाजन एल्गोरिथ्म की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए कि दिए हुए बहुपद मानक रूप में नहीं हैं। भाग की क्रिया करने के लिए, हम सर्वप्रथम भाज्य और भाजक दोनों को उनकी घातों के घटते क्रम में लिखते हैं।

इसलिए, भाज्य $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ तथा भाजक $= -x^2 + x - 1$ है।

भाग देने की क्रिया दायीं ओर दिखाई गई है। हम यहाँ रुकते हैं, क्योंकि 3 की घात 0, $-x^2 + x - 1$ की घात 2 से कम है।

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & -x^3 + x^2 - x \\ & \;\;+ \quad - \quad + \\ \hline & 2x^2 - 2x + 5 \\ & 2x^2 - 2x + 2 \\ & - \quad + \quad - \\ \hline & 3 \end{array}$$

इसलिए भाग कि क्रिया करके शेषफल 3 तथा भागफल $x - 2$ प्राप्त होता है।
अब

$$\begin{aligned} \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल} &= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3 \\ &= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3 \\ &= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ &= \text{भाज्य} \end{aligned}$$

अत:, विभाजन एल्गोरिथ्म सत्यापित हो गया।

उदाहरण 9 : $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ के सभी शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि आपको इसके दो शून्यक $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ ज्ञात हैं।

हल : क्योंकि दो शून्यक $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ हैं, इसलिए $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) = x^2 - 2$ दिए गए बहुपद का एक गुणक है। अब आइए विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग दिए गए बहुपद और $x^2 - 2$ के लिए करें।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\hline
x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & \underline{\overset{-}{2x^4} \qquad\quad \overset{+}{-\,4x^2}} \\
 & \qquad -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & \qquad \underline{\overset{+}{-3x^3} \qquad\quad \overset{-}{+\,6x}} \\
 & \qquad\qquad\quad x^2 - 2 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{\overset{-}{x^2} \;\; \overset{+}{-\,2}} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

भागफल का प्रथम पद $\dfrac{2x^4}{x^2} = 2x^2$ है

भागफल का दूसरा पद $\dfrac{-3x^3}{x^2} = -3x$ है

भागफल का तीसरा पद $\dfrac{x^2}{x^2} = 1$ है

इसलिए $\qquad 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$

अब $-3x$ को विभक्त करके $2x^2 - 3x + 1$ के गुणनखंड $(2x - 1)(x - 1)$ प्राप्त होते हैं। इसलिए, इसके शून्यक $x = \dfrac{1}{2}$ और $x = 1$ द्वारा दिए जाएँगे। अतः, दिए हुए बहुपद के शून्यक $\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}$ और 1 हैं।

प्रश्नावली 2.3

1. विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके, निम्न में बहुपद $p(x)$ को बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए :
   (i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3, \quad g(x) = x^2 - 2$
   (ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5, \quad g(x) = x^2 + 1 - x$
   (iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6, \quad g(x) = 2 - x^2$
2. पहले बहुपद से दूसरे बहुपद को भाग करके, जाँच कीजिए कि क्या प्रथम बहुपद द्वितीय बहुपद का एक गुणनखंड है :

(i) $t^2 - 3, 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1, 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1, x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के अन्य सभी शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं।

4. यदि $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर, भागफल और शेषफल क्रमश: $x - 2$ और $-2x + 4$ हैं तो $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

5. बहुपदों $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ और $r(x)$ के ऐसे उदाहरण दीजिए जो विभाजन एल्गोरिथ्म को संतुष्ट करते हों तथा

(i) घात $p(x)$ = घात $q(x)$ (ii) घात $q(x)$ = घात $r(x)$ (iii) घात $r(x) = 0$

प्रश्नावली 2.4 (ऐच्छिक)*

1. सत्यापित कीजिए कि निम्न त्रिघात बहुपदों के साथ दी गई संख्याएँ उसकी शून्यक हैं। प्रत्येक स्थिति में शून्यकों और गुणांकों के बीच के संबंध को भी सत्यापित कीजिए :

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2;\ \frac{1}{2}, 1, -2$ (ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2;\ 2, 1, 1$

2. एक त्रिघात बहुपद प्राप्त कीजिए जिसके शून्यकों का योग, दो शून्यकों को एक साथ लेकर उनके गुणनफलों का योग तथा तीनों शून्यकों के गुणनफल क्रमश: $2, -7, -14$ हों।

3. यदि बहुपद $x^3 - 3x^2 + x + 1$ के शून्यक $a - b, a, a + b$ हों, तो a और b ज्ञात कीजिए।

4. यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ के दो शून्यक $2 \pm \sqrt{3}$ हों, तो अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।

5. यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ को एक अन्य बहुपद $x^2 - 2x + k$ से भाग दिया जाए और शेषफल $x + a$ आता हो, तो k तथा a ज्ञात कीजिए।

2.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. घातों 1, 2 और 3 के बहुपद क्रमश: रैखिक बहुपद, द्विघात बहुपद एवं त्रिघात बहुपद कहलाते हैं।

2. एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है, के रूप का होता है।

* यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

3. एक बहुपद $p(x)$ के शून्यक उन बिंदुओं के x–निर्देशांक होते हैं जहाँ $y = p(x)$ का ग्राफ x–अक्ष को प्रतिच्छेद करता है।

4. एक द्विघात बहुपद के अधिक से अधिक दो शून्यक हो सकते हैं और एक त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक तीन शून्यक हो सकते हैं।

5. यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हों, तो

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

6. यदि α, β, γ त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हों, तो

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

और $$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

7. विभाजन एल्गोरिथ्म के अनुसार दिए गए बहुपद $p(x)$ और शून्येतर बहुपद $g(x)$ के लिए दो ऐसे बहुपदों $q(x)$ तथा $r(x)$ का अस्तित्व है कि

$$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x),$$

जहाँ $r(x) = 0$ है या घात $r(x) <$ घात $g(x)$ है।

1063CH03

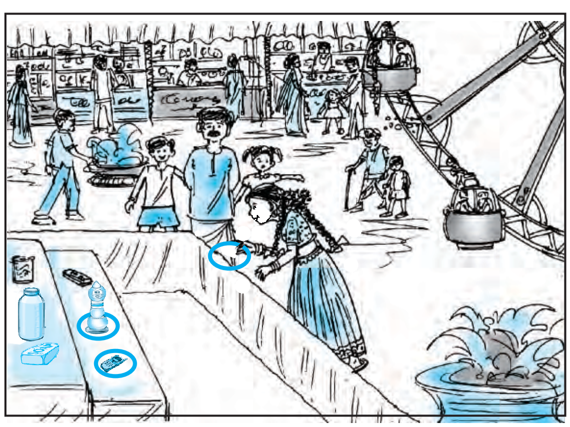
दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म (Pair of linear equation in two variables) 3

3.1 भूमिका

आपने इस प्रकार की स्थिति का सामना अवश्य किया होगा, जैसी नीचे दी गई है:

अखिला अपने गाँव के एक मेले में गई। वह एक चरखी (Giant wheel) की सवारी करना चाहती थी और हूपला (Hoopla) [एक खेल जिसमें आप एक स्टाल में रखी किसी वस्तु पर एक वलय (ring) को फेंकते हैं और यदि वह वस्तु को पूर्णरूप से घेर ले, तो आपको वह वस्तु मिल जाती है] खेलना चाहती थी। जितनी बार उसने चरखी की सवारी की उससे आधी बार उसने हूपला खेल खेला। यदि प्रत्येक बार की सवारी के लिए उसे 3 रु तथा हूपला खेलने के लिए 4 रु खर्च करने पड़े, तो आप कैसे ज्ञात करेंगे कि उसने कितनी बार चरखी की सवारी की और कितनी बार हूपला खेला, जबकि उसने इसके लिए कुल 20 रु खर्च किए?

हो सकता है कि आप इसे ज्ञात करने के लिए अलग-अलग स्थितियाँ लेकर चलें। यदि उसने एक बार सवारी की, क्या यह संभव है? क्या यह भी संभव है कि उसने दो बार



सवारी की? इत्यादि। अथवा आप कक्षा IX के ज्ञान का उपयोग करते हुए, इन स्थितियों को दो चरों वाले रैखिक समीकरणों द्वारा निरूपित कर सक्ते हैं।

आइए इस प्रक्रिया को समझें।

अखिला द्वारा सवारी करने की संख्या को x तथा उसके द्वारा हूपला खेल खेलने की संख्या को y से निरूपित कीजिए। अब दी हुई स्थिति को दो समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है :

$$y = \frac{1}{2}x \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad (2)$$

क्या हम इस समीकरण युग्म का हल ज्ञात कर सकते हैं? इन्हें ज्ञात करने की कई विधियाँ हैं, जिनका हम इस अध्याय में अध्ययन करेंगे।

3.2 दो चरों में रैखिक समीकरण युग्म

कक्षा IX से याद कीजिए कि निम्न समीकरण दो चरों के रैखिक समीकरणों के उदाहरण हैं:

$$2x + 3y = 5$$

$$x - 2y - 3 = 0$$

और $\quad x - 0y = 2$ अर्थात् $x = 2$

आप यह भी जानते हैं कि वह समीकरण, जिसको $ax + by + c = 0$ के रूप में रखा जा सकता है, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और ***a* और *b* दोनों शून्य नहीं हैं,** दो चरों x और y में एक रैखिक समीकरण कहलाता है। (प्रतिबंध जैसे a और b दोनों शून्य नहीं हैं, हम प्राय: $a^2 + b^2 \neq 0$ से प्रदर्शित करते हैं।) आपने यह भी पढ़ा है कि ऐसी समीकरण का हल संख्याओं के मानों का एक युग्म होता है, एक x के लिए तथा दूसरा y के लिए, जो समीकरण के दोनों पक्षों को बराबर कर देता है।

उदाहरण के लिए, आइए समीकरण $2x + 3y = 5$ के बाएँ पक्ष (LHS) में, $x = 1$ और $y = 1$ रखें। तब

$$\text{बायाँ पक्ष} = 2(1) + 3(1) = 2 + 3 = 5,$$

जो समीकरण के दाएँ पक्ष (RHS) के बराबर है।

अत:, $x = 1$ और $y = 1$ समीकरण $2x + 3y = 5$ का एक हल है।

अब आइए समीकरण $2x + 3y = 5$ में, $x = 1$ और $y = 7$ रखें। तब,

बायाँ पक्ष = $2(1) + 3(7) = 2 + 21 = 23$

जो दाएँ पक्ष के बराबर नहीं है।

अतः, $x = 1$ और $y = 7$ दी हुई समीकरण का एक हल **नहीं** है।

ज्यामितीय दृष्टि से इसका क्या अर्थ है? इसका अर्थ है कि बिंदु (1, 1) समीकरण $2x + 3y = 5$ द्वारा निरूपित रेखा पर स्थित है और बिंदु (1, 7) इस पर स्थित नहीं है। इसलिए, **समीकरण का प्रत्येक हल उसको निरूपित करने वाली रेखा पर स्थित एक बिंदु होता है।**

वास्तव में, यह किसी भी रैखिक समीकरण के लिए सत्य है, अर्थात् **दो चरों वाले रैखिक समीकरण $ax + by + c = 0$ का प्रत्येक हल (x, y) इस समीकरण को निरूपित करने वाली रेखा के एक बिंदु के संगत होता है और विलोमतः भी ऐसा होता है।**

अब ऊपर दिए गए समीकरणों (1) और (2) को लीजिए। इन समीकरणों को साथ लेने पर, हमें अखिला की मेले के बारे में सूचना प्राप्त होती है।

ये दो रैखिक समीकरण **उन्हीं दो चरों x और y** में हैं। इस प्रकार के समीकरणों को *दो चरों में रैखिक समीकरणों का एक युग्म (या **रैखिक समीकरण युग्म**) कहते हैं।*

आइए, देखें कि बीजगणितीय दृष्टि में ये कैसे युग्म हैं।

दो चरों x और y में रैखिक समीकरण युग्म का व्यापक रूप

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

और $$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ है}$$

जहाँ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ सभी वास्तविक संख्याएँ हैं और $a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ है।

दो चरों में एक रैखिक समीकरण युग्म के कुछ उदाहरण हैं:

$2x + 3y - 7 = 0$ और $9x - 2y + 8 = 0$

$5x = y$ और $-7x + 2y + 3 = 0$

$x + y = 7$ और $17 = y$

क्या आप जानते हैं कि ये ज्यामितीय दृष्टि से कैसे युग्म हैं?

कक्षा IX से याद कीजिए कि दो चरों में एक रैखिक समीकरण का ज्यामितीय (अर्थात् ग्राफीय) निरूपण एक सरल रेखा होता है। क्या अब आप बता सकते हैं कि दो चरों में रैखिक समीकरण युग्म ज्यामितीय रूप में कैसा दिखेगा? ये दो सरल रेखाएँ होंगी, जिन्हें साथ-साथ लिया जाएगा।

आपने कक्षा IX में यह भी पढ़ा है कि एक तल में यदि दो रेखाएँ दी हों, तो निम्न में से केवल एक ही संभावना हो सकती है:

(i) दोनों रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं।

(ii) दोनों रेखाएँ प्रतिच्छेद नहीं करती हैं, अर्थात् वे समांतर हैं।

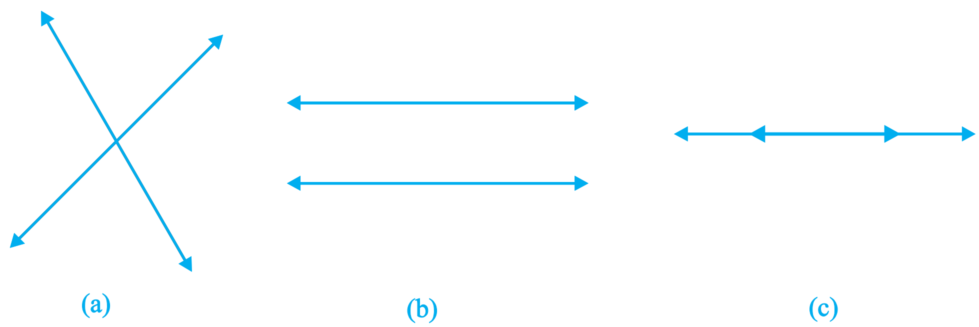
(iii) दोनों रेखाएँ संपाती हैं।

इन सभी संभावनाओं को हम आकृति 3.1 में दर्शाते हैं:

आकृति 3.1 (a) में, ये प्रतिच्छेद करती हैं।

आकृति 3.1 (b) में, ये समांतर हैं।

आकृति 3.1 (c) में, ये संपाती हैं।



आकृति 3.1

रैखिक समीकरण युग्म को प्रदर्शित करने वाली दोनों विधियों यथा बीजगणितीय तथा ज्यामितीय को साथ-साथ प्रयुक्त किया जा सकता है। आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : हम अनुच्छेद 3.1 में दिया गया उदाहरण लेते हैं। अखिला मेले में 20 रु लेकर जाती है और वह चरखी की सवारी करना तथा हूपला खेल खेलना चाहती है। इन स्थितियों को बीजगणितीय तथा ग्राफीय (ज्यामितीय) रूपों में व्यक्त कीजिए।

हल : बनाया गया समीकरण युग्म है:

$$y = \frac{1}{2}x$$

अर्थात् $$x - 2y = 0 \quad (1)$$

और $$3x + 4y = 20 \quad (2)$$

आइए इन समीकरणों को ग्राफीय रूप में व्यक्त करें। इसके लिए, हमें प्रत्येक समीकरण के कम-से-कम दो हल चाहिए। हम इन हलों को सारणी 3.1 में देते हैं।

सारणी 3.1

x	0	2
$y = \frac{x}{2}$	0	1

(i)

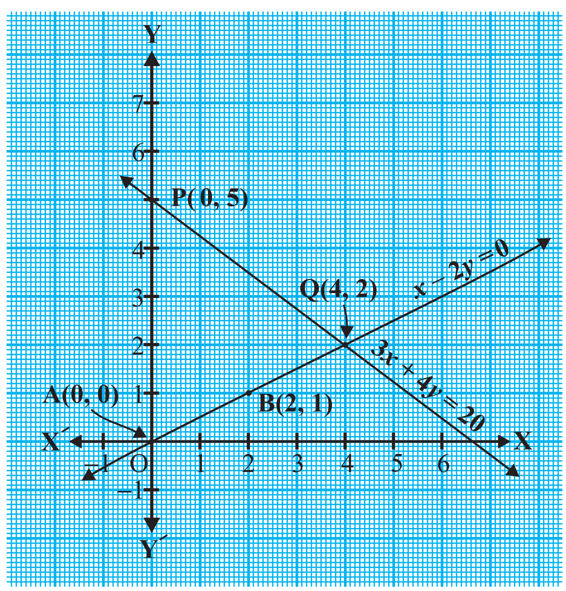
x	0	$\frac{20}{3}$	4
$y = \frac{20-3x}{4}$	5	0	2

(ii)

कक्षा IX से याद कीजिए कि प्रत्येक रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं। इसलिए आप कोई भी दो हल चुन सकते हैं, जो हमारे द्वारा चूने हुए हलों से भी हो सकते हैं। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि हमने पहले तथा दूसरे समीकरणों के हल के लिए, $x = 0$ क्यों चुना है? जब एक चर शून्य हो जाता है, तो समीकरण एक चर के रैखिक समीकरण में बदल जाता है, जिसे आसानी से हल किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, समीकरण (2) में $x = 0$ रखने पर, हम पाते हैं कि $4y = 20$ है, अर्थात् $y = 5$ है। इसी प्रकार, समीकरण (2) में $y = 0$ रखने पर हमें प्राप्त होता है:

$3x = 20$, अर्थात्, $x = \frac{20}{3}$ है। चूँकि $\frac{20}{3}$ एक पूर्णांक नहीं है, इसलिए इसे ग्राफ पेपर पर ठीक-ठीक आलेखित करना आसान नहीं है। अत: हम $y = 2$ चुनते हैं, जिससे $x = 4$ मिलता है, जो एक पूर्णांक है।

सारणी 3.1 के हलों के संगत बिंदुओं A(0, 0), B(2, 1) और P(0, 5), Q(4, 2) को आलेखित कीजिए। अब समीकरणों $x - 2y = 0$ और $3x + 4y = 20$ को निरूपित करने वाली रेखाओं AB तथा PQ को खींचिए, जैसा कि आकृति 3.2 में दर्शाया गया है।



आकृति 3.2

आकृति 3.2 में ध्यान दीजिए कि दोनों समीकरणों को निरूपित करने वाली दोनों रेखाएँ बिंदु (4, 2) पर प्रतिच्छेद करती हैं। इसका क्या अर्थ है, इस पर हम अगले अनुच्छेद में चर्चा करेंगे।

उदाहरण 2 : रोमिला एक स्टेशनरी की दुकान में गई और ₹ 9 में 2 पेंसिल तथा 3 रबड़ खरीदीं। उसकी सहेली सोनाली ने रोमिला के पास नई तरह की पेंसिल और रबड़ देखी और उसने भी ₹ 18 में उसी तरह की 4 पेंसिल और 6 रबड़ खरीदीं। इस स्थिति को बीजगणितीय तथा ग्राफीय (ज्यामितीय) रूपों में व्यक्त कीजिए।

हल : आइए 1 पेंसिल का मूल्य ₹ x तथा 1 रबड़ का मूल्य ₹ y मान लें। तब, बीजगणितीय रूप निम्न समीकरणों द्वारा देय है :

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

और

$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

इनका तुल्य ज्यामितीय निरूपण ज्ञात करने के लिए, हम प्रत्येक समीकरण द्वारा निरूपित रेखा पर दो बिंदु प्राप्त करते हैं। अर्थात्, हम प्रत्येक समीकरण के दो हल प्राप्त करते हैं। ये हल निम्न सारणी 3.2 में दिए गए हैं:

सारणी 3.2

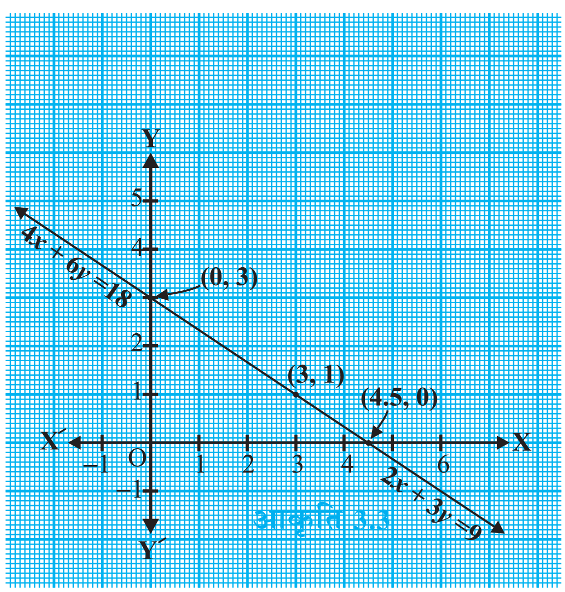
x	0	4.5
$y = \frac{9-2x}{3}$	3	0

(i)

x	0	3
$y = \frac{18-4x}{6}$	3	1

(ii)

हम इन बिंदुओं को एक ग्राफ पेपर पर आलेखित करते हैं और रेखाएँ खींचते हैं। हम पाते हैं कि दोनों रेखाएँ संपाती हैं (देखिए आकृति 3.3)। ऐसा इसलिए है कि दोनों समीकरण तुल्य हैं, अर्थात् एक को दूसरे से प्राप्त किया जा सकता है।



आकृति 3.3

उदाहरण 3 : दो रेल पटरियाँ, समीकरणों $x + 2y - 4 = 0$ और $2x + 4y - 12 = 0$ द्वारा निरूपित की गई हैं। इस स्थिति को ज्यामितीय रूप से व्यक्त कीजिए।

हल : समीकरणों

$$x + 2y - 4 = 0 \quad (1)$$
$$2x + 4y - 12 = 0 \quad (2)$$

में से प्रत्येक के दो हल सारणी 3.3 में दिए गए हैं:

सारणी 3.3

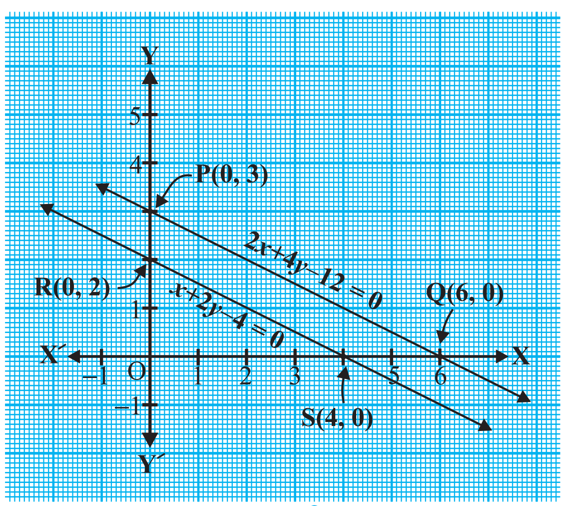
x	0	4
$y = \frac{4-x}{2}$	2	0

(i)

x	0	6
$y = \frac{12-2x}{4}$	3	0

(ii)

इन समीकरणों को ग्राफीय रूप में प्रदर्शित करने के लिए, हम बिंदुओं R(0, 2) और S(4, 0) को रेखा RS प्राप्त करने के लिए आलेखित करते हैं और बिंदुओं P (0, 3) और Q(6, 0) को रेखा PQ प्राप्त करने के लिए आलेखित करते हैं।



आकृति 3.4

आकृति 3.4 में, हम देखते हैं कि ये रेखाएँ कहीं पर प्रतिच्छेद नहीं करती हैं, अर्थात् वे समांतर हैं।

इसलिए, हमने कई स्थितियाँ देखी हैं जिन्हें एक रैखिक समीकरण युग्म द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। हमने उनके बीजगणितीय और ज्यामितीय निरूपण देखे। अगले कुछ अनुच्छेदों में हम चर्चा करेंगे कि कैसे इन निरूपणों को एक रैखिक समीकरण युग्म के हल ज्ञात करने में उपयोग किया जा सकता है।

प्रश्नावली 3.1

1. आफ़ताब अपनी पुत्री से कहता है, 'सात वर्ष पूर्व मैं तुमसे सात गुनी आयु का था। अब से 3 वर्ष बाद मैं तुमसे केवल तीन गुनी आयु का रह जाऊँगा।' (क्या यह मनोरंजक है?) इस स्थिति को बीजगणितीय एवं ग्राफीय रूपों में व्यक्त कीजिए।
2. क्रिकेट टीम के एक कोच ने ₹ 3900 में 3 बल्ले तथा 6 गेंदें खरीदीं। बाद में उसने एक और बल्ला तथा उसी प्रकार की 3 गेंदें ₹ 1300 में खरीदीं। इस स्थिति को बीजगणितीय तथा ज्यामितीय रूपों में व्यक्त कीजिए।
3. 2 kg सेब और 1 kg अंगूर का मूल्य किसी दिन ₹ 160 था। एक महीने बाद 4 kg सेब और दो kg अंगूर का मूल्य ₹ 300 हो जाता है। इस स्थिति को बीजगणितीय तथा ज्यामितीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

3.3 रैखिक समीकरण युग्म का ग्राफीय विधि से हल

पिछले अनुच्छेद में, आपने देखा कि एक रैखिक समीकरण युग्म को कैसे ग्राफीय रूप में दो रेखाओं में व्यक्त किया जाता है। आपने यह भी देखा है कि ये रेखाएँ प्रतिच्छेद कर सकती हैं या समांतर हो सकती हैं या संपाती हो सकती हैं। क्या हम उन्हें प्रत्येक स्थिति में हल कर सकते हैं? और यदि ऐसा है, तो किस प्रकार? हम प्रयत्न करेंगे और इन प्रश्नों के उत्तर ज्यामितीय दृष्टि से इस अनुच्छेद में देंगे।

आइए हम पिछले उदाहरणों को एक-एक कर देखें।

- उदाहरण 1 की स्थिति में, ज्ञात कीजिए कि अखिला ने कितनी बार चरखी पर सवारी की और कितनी बार हूपला खेल खेला।

आकृति 3.2 में, आपने देखा था कि इस स्थिति को निरूपित करने वाले समीकरण ज्यामितीय रूप से बिंदु (4, 2) पर प्रतिच्छेद करने वाली दो रेखाओं को निरूपित करते हैं। इसलिए, बिंदु (4, 2) दोनों समीकरणों $x - 2y = 0$ और $3x + 4y = 20$ को निरूपित करने वाली रेखाओं पर स्थित है और केवल यही उभयनिष्ठ बिंदु है।

आइए हम बीजगणितीय रूप से सत्यापित करें कि $x = 4, y = 2$ दिए हुए समीकरण युग्म का एक हल है। प्रत्येक समीकरण में x और y के मान रखने पर, हम

प्राप्त करते हैं कि $4 - 2 \times 2 = 0$ और $3(4) + 4(2) = 20$ है। अतः, हमने सत्यापित किया है कि $x = 4$, $y = 2$ दोनों समीकरणों का एक हल है। **चूँकि (4, 2) दोनों रेखाओं का केवल एक उभयनिष्ठ बिंदु है, इसलिए दो चरों में रैखिक समीकरण युग्म का एक और केवल एक हल है।**

इस प्रकार, अखिला ने चरखी पर 4 बार सवारी की और 2 बार हूपला खेल खेला।

- उदाहरण 2 की स्थिति में, क्या आप प्रत्येक पेंसिल और प्रत्येक रबड़ का मूल्य ज्ञात कर सकते हैं?

  आकृति 3.3 में, इस स्थिति को ज्यामितीय रूप में एक संपाती रेखा युग्म द्वारा दर्शाया गया है। समीकरणों के हल इनके सर्वनिष्ठ बिंदुओं (common points) द्वारा प्राप्त होते हैं।

  क्या इन रेखाओं में कोई सर्वनिष्ठ बिंदु है? ग्राफ से हम देखते हैं कि इस रेखा का प्रत्येक बिंदु दोनों समीकरणों का एक हल है। अतः, समीकरणों $2x + 3y = 9$ और $4x + 6y = 18$ के **अपरिमित (Infinitely) रूप से अनेक हल** हैं। इससे हमें आश्चर्य नहीं होना चाहिए, क्योंकि यदि हम समीकरण $4x + 6y = 18$ को 2 से भाग दें, तो हमें $2x + 3y = 9$ प्राप्त होता है, जो कि समीकरण (1) ही है। अर्थात् दोनों समीकरण तुल्य हैं। ग्राफ से, हम देखते हैं कि रेखा पर कोई बिंदु प्रत्येक पेंसिल और प्रत्येक रबड़ का मूल्य देता है। उदाहरण के लिए, प्रत्येक पेंसिल तथा प्रत्येक रबड़ का मूल्य क्रमशः 3 रु तथा 1 रु हो सकता है। अथवा प्रत्येक पेंसिल का मूल्य 3.75 रु तथा रबड़ का मूल्य 0.50 रु हो सकता है, इत्यादि।

- उदाहरण 3 की स्थिति में, क्या रेल पटरियाँ किसी स्थान पर मिल सकती हैं?

  आकृति 3.4 में, दी हुई स्थिति को ज्यामितीय रूप में दो समांतर रेखाओं से निरूपित किया गया है। क्योंकि रेखाएँ प्रतिच्छेद नहीं करती हैं, ये पटरियाँ एक दूसरे से नहीं मिलती हैं। इसका यह भी अर्थ है कि इन समीकरणों का कोई उभयनिष्ठ हल नहीं है।

एक रैखिक समीकरण युग्म, जिसका कोई हल नहीं होता, रैखिक समीकरणों का असंगत (inconsistent) युग्म कहलाता है। एक रैखिक समीकरण युग्म, जिसका हल होता है, रैखिक समीकरणों का संगत (consistent) युग्म कहलाता है। तुल्य रैखिक समीकरणों के एक युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं। इस युग्म को दो चरों के रैखिक समीकरणों का आश्रित (dependent) युग्म कहते हैं। ध्यान दीजिए कि रैखिक समीकरणों का आश्रित युग्म सदैव संगत होता है।

अब हम दो चरों में एक रैखिक समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाओं के व्यवहार को तथा हल के अस्तित्व होने को निम्न प्रकार से एक सारांश के रूप में व्यक्त कर सकते हैं:

(i) रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं। इस स्थिति में, समीकरण युग्म का अद्वितीय हल (Unique solution) होता है (अविरोधी समीकरण युग्म)।

(ii) रेखाएँ समांतर हो सकती हैं। इस स्थिति में, समीकरणों का कोई हल नहीं होता है (असंगत समीकरण युग्म)।

(iii) रेखाएँ संपाती हो सकती हैं। इस स्थिति में, समीकरणों के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं [आश्रित (संगत) समीकरण युग्म]।

आइए अब हम उदाहरणों 1, 2 और 3 में बने रैखिक समीकरण युग्मों पर फिर से वापस आएँ और विचार करें कि वे युग्म ज्यामितीय रूप में किस प्रकार के हैं।

(i) $x - 2y = 0$ और $3x + 4y - 20 = 0$ (रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ और $4x + 6y - 18 = 0$ (रेखाएँ संपाती हैं)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ और $2x + 4y - 12 = 0$ (रेखाएँ समांतर हैं)

अब आइए सभी तीनों उदाहरणों में, $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ के मान लिखें और उनकी तुलना करें। यहाँ a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 अनुच्छेद 3.2 में, व्यापक रूप में दिए गए समीकरणों के गुणांक को व्यक्त करते हैं।

सारणी 3.4

क्र. सं.	रेखा युग्म	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	अनुपातों की तुलना	ग्राफीय निरूपण	बीजगणितीय निरूपण
1	$x-2y=0$ $3x+4y-20=0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेद करती हुई रेखाएँ	केवल एक हल (अद्वितीय)
2	$2x+3y-9=0$ $4x+6y-18=0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अपरिमित रूप से अनेक हल
3	$x+2y-4=0$ $2x+4y-12=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समांतर रेखाएँ	कोई हल नहीं

सारणी 3.4 से आप देख सकते हैं कि

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ से निरूपित रेखाएँ:

(i) प्रतिच्छेद करती हैं, तो $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ है।

(ii) संपाती हैं, तो $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ है।

(iii) समांतर हैं, तो $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ है।

वास्तव में, इसका विलोम भी किसी भी रेखा युग्म के लिए सत्य है। आप कुछ और उदाहरण लेकर इसकी जाँच कर सकते हैं।

आइए अब इसको स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 4 : ग्राफ द्वारा जाँच कीजिए कि समीकरण युग्म

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$

और

$$2x - 3y = 12 \quad (2)$$

संगत है। यदि ऐसा है, तो उन्हें ग्राफ द्वारा हल कीजिए।

हल : आइए समीकरणों (1) और (2) के ग्राफ खींचें। इसके लिए, हम प्रत्येक समीकरण के दो हल ज्ञात करते हैं, जो सारणी 3.5 में दिए हैं:

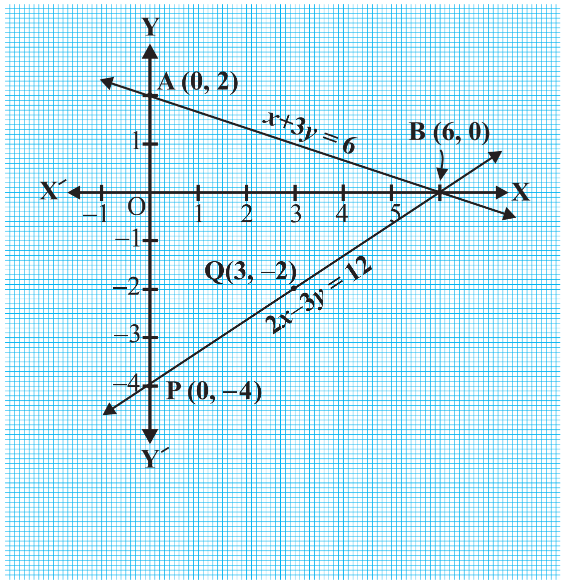
सारणी 3.5

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	– 4	–2

एक ग्राफ पेपर पर बिंदुओं A(0, 2), B(6, 0), P(0, – 4) और Q(3, – 2) को आलेखित कीजिए, और बिंदुओं को मिलाकर रेखा AB और PQ आकृति 3.5 के अनुसार बनाइए।

हम देखते हैं कि रेखाओं AB और PQ में एक उभयनिष्ठ बिंदु B(6, 0) है। इसलिए, रैखिक समीकरण युग्म का एक हल $x = 6, y = 0$ है, अर्थात् समीकरण युग्म संगत है।



आकृति 3.5

उदहारण 5 : ग्राफ द्वारा ज्ञात कीजिए कि निम्न समीकरण युग्म का हल नहीं है, अद्वितीय हल है अथवा अपरिमित रूप से अनेक हल हैं:

$$5x - 8y + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \qquad (2)$$

हल : समीकरण (2) को $\frac{5}{3}$ से गुणा करने पर, हम पाते हैं :

$$5x - 8y + 1 = 0$$

परंतु यह वही है जो समीकरण (1) है। अतः, समीकरणों (1) और (2) से निरूपित रेखाएँ संपाती हैं। इसलिए, समीकरणों (1) और (2) के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

ग्राफ पर कुछ बिंदु अंकित कीजिए और स्वयं जाँच कर लीजिए।

उदाहरण 6 : चंपा एक 'सेल' में कुछ पैंट और स्कर्ट खरीदने गई। जब उसकी सहेलियों ने पूछा कि प्रत्येक के कितने नग खरीदे, तो उसने उत्तर दिया, "स्कर्ट की संख्या खरीदी गई पैंटों की संख्या की दो गुनी से दो कम है। स्कर्ट की संख्या खरीदी गई पैंटों की संख्या की

चार गुनी से भी चार कम है।" सहेलियों की यह जानने के लिए सहायता कीजिए कि चंपा ने कितनी पैंट और स्कर्ट खरीदीं।

हल : आइए हम पैंटों की संख्या को x तथा स्कर्ट की संख्या को y से निरूपित करें। तब, इनसे बनी समीकरण हैं:

$$y = 2x - 2 \quad (1)$$

और

$$y = 4x - 4 \quad (2)$$

अब आइए समीकरणों (1) और (2) के ग्राफ खींचने के लिए, प्रत्येक समीकरण के दो हल ज्ञात करें। ये सारणी 3.6 में दिए हैं :

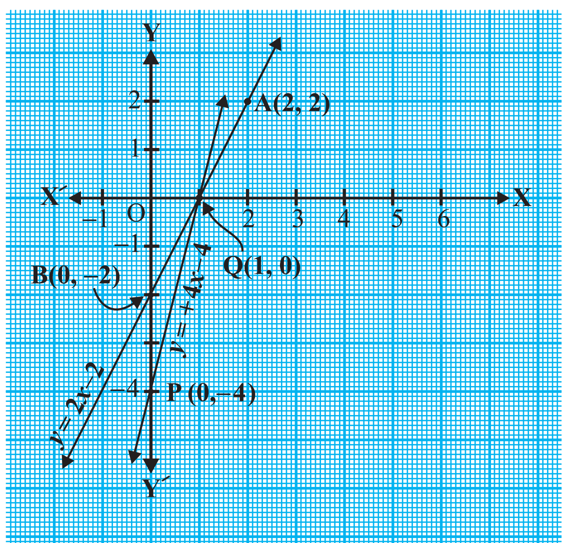
सारणी 3.6

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	-2

x	0	1
$y = 4x - 4$	-4	0

बिंदुओं को आलेखित कीजिए और समीकरणों को निरूपित करने के लिए उनसे जाने वाली रेखाएँ खींचिए, जैसा आकृति 3.6 में दिखाया गया है।

ये दोनों रेखाएँ बिंदु (1, 0) पर प्रतिच्छेद करती हैं। इसलिए $x = 1, y = 0$ रैखिक समीकरण युग्म का अभीष्ट हल है, अर्थात् उसके द्वारा खरीदी गई पैंटों की संख्या 1 है और उसने कोई स्कर्ट नहीं खरीदी है।



आकृति 3.6

जाँच : (1) और (2) में $x = 1$ और $y = 0$ रखने पर हम पाते हैं कि दोनों समीकरण संतुष्ट हो जाती हैं।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके ग्राफीय विधि से हल ज्ञात कीजिए।

(i) कक्षा X के 10 विद्यार्थियों ने एक गणित की पहेली प्रतियोगिता में भाग लिया। यदि लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से 4 अधिक हो, तो प्रतियोगिता में भाग लिए लड़कों और लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(ii) 5 पेंसिल तथा 7 कलमों का कुल मूल्य ₹ 50 है, जबकि 7 पेंसिल तथा 5 कलमों का कुल मूल्य ₹ 46 है। एक पेंसिल का मूल्य तथा एक कलम का मूल्य ज्ञात कीजिए।

2. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं, समांतर हैं अथवा संपाती हैं :

(i) $5x - 4y + 8 = 0$
$7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$
$18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$
$2x - y + 9 = 0$

3. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म संगत हैं या असंगत:

(i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$

(ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$

(iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$

4. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों में से कौन से युग्म संगत/असंगत हैं, यदि संगत हैं तो ग्राफीय विधि से हल ज्ञात कीजिए।

(i) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$
(ii) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$
(iii) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$
(iv) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

5. एक आयताकार बाग, जिसकी लंबाई, चौड़ाई से 4 m अधिक है, का अर्धपरिमाप 36 m है। बाग की विमाएँ (लंबाई और चौड़ाई) ज्ञात कीजिए।

6. एक रैखिक समीकरण $2x + 3y - 8 = 0$ दी गई है। दो चरों में एक ऐसी और रैखिक समीकरण लिखिए ताकि प्राप्त युग्म का ज्यामितीय निरूपण जैसा कि
   (i) प्रतिच्छेद करती रेखाएँ हों। (ii) समांतर रेखाएँ हों।
   (iii) संपाती रेखाएँ हों।

7. समीकरणों $x - y + 1 = 0$ और $3x + 2y - 12 = 0$ का ग्राफ खींचिए। x-अक्ष और इन रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए और त्रिभुजाकार पटल को छायांकित (Shade) कीजिए।

3.4 एक रैखिक समीकरण युग्म को हल करने की बीजगणितीय (elgebaric) विधि

पिछले अनुच्छेद में, हमने एक रैखिक समीकरण युग्म को हल करने के लिए ग्राफीय विधि की चर्चा की। ग्राफीय विधि उस स्थिति में सुविधाजनक नहीं होती है, जब रैखिक समीकरणों के हलों को निरूपित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक पूर्णांक न हों, जैसे $\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{7}\right)$, $(-1.75, 3.3)$, $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$ आदि। इस प्रकार के बिंदुओं को पढ़ने में आवश्यक रूप से त्रुटि होने की संभावना रहती है। क्या हल ज्ञात करने की कोई अन्य विधि भी है? इसकी कई बीजगणितीय (बीजीय) विधियाँ हैं, जिनकी हम अब चर्चा करेंगे।

3.4.1 प्रतिस्थापन (Substitution) विधि : हम प्रतिस्थापन विधि को कुछ उदाहरण लेकर समझाएँगे।

उदाहरण 7 : प्रतिस्थापन विधि द्वारा निम्न रैखिक समीकरण युग्म को हल कीजिए :

$$7x - 15y = 2 \quad (1)$$

$$x + 2y = 3 \quad (2)$$

हल :

चरण 1 : हम किसी एक समीकरण को लेते हैं और किसी एक चर को दूसरे के पदों में लिखते हैं। आइए समीकरण (2)

$$x + 2y = 3,$$

को लें और इसे $x = 3 - 2y$ के रूप में लिखें। (3)

चरण 2 : x का यह मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित कीजिए। हम पाते हैं:

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

अर्थात् $21 - 14y - 15y = 2$

अर्थात् $-29y = -19$

इसलिए $y = \frac{19}{29}$

चरण 3 : y का यह मान समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं:

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

अतः हल है: $x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29}$

सत्यापन : $x = \frac{49}{29}$ और $y = \frac{19}{29}$ को प्रतिस्थापित करने पर, आप जाँच कर सकते हैं कि दोनों समीकरण (1) और (2) संतुष्ट हो जाते हैं।

प्रतिस्थापन विधि को और अधिक स्पष्ट रूप से समझने के लिए, आइए इस पर चरणबद्ध रूप से विचार करें।

चरण 1 : एक चर का मान, माना y को दूसरे चर, माना x के पदों में किसी भी समीकरण से ज्ञात कीजिए, जो सुविधाजनक हो।

चरण 2 : y के इस मान को दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित कीजिए और इसको एक चर x के समीकरण के रूप में बदलिए, जिसको हल किया जा सकता है। कभी-कभी, जैसा कि निम्न उदाहरणों 9 तथा 10 में है, आप बिना किसी चर के कथन प्राप्त कर सकते हैं। यदि यह कथन सत्य है, तो आप यह निर्णय कर सकते हैं कि रैखिक समीकरण युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। यदि चरण 2 में प्राप्त कथन असत्य है, तो रैखिक समीकरण युग्म विरोधी है।

चरण 3 : चरण 2 से प्राप्त x (अथवा y) का मान उस समीकरण, जिसे चरण 1 में प्रयोग किया है, में प्रतिस्थापित करके दूसरे चर का मान प्राप्त कीजिए।

टिप्पणी : हमने एक चर का मान दूसरे चर के पद में व्यक्त करके, रैखिक समीकरण युग्म को हल करने के लिए **प्रतिस्थापित** किया है। इसलिए इस विधि को **प्रतिस्थापन विधि** कहते हैं।

उदाहरण 8 : प्रश्नावली 3.1 के प्रश्न संख्या 1 को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए।

हल : माना आफ़ताब और उसकी पुत्री की आयु (वर्षों में) क्रमशः s और t हैं। तब, उस स्थिति को निरूपित करने के लिए, रैखिक समीकरण युग्म है:

$$s - 7 = 7(t - 7), \text{ अर्थात् } s - 7t + 42 = 0 \quad (1)$$

तथा

$$s + 3 = 3(t + 3), \text{ अर्थात् } s - 3t = 6 \quad (2)$$

समीकरण (2) का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं: $s = 3t + 6$

समीकरण (1) में s का मान रखने पर, हम पाते हैं:

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0$$

अर्थात् $4t = 48$, जिससे $t = 12$ प्राप्त होता है।

t के इस मान को समीकरण (2) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$s = 3\,(12) + 6 = 42$$

अतः, आफ़ताब और उसकी पुत्री क्रमशः 42 वर्ष और 12 वर्ष के हैं।

इस उत्तर की पुष्टि के लिए, यह जाँच कर लीजिए कि यह दी हुई समस्या के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है या नहीं।

उदाहरण 9 : आइए अनुच्छेद 3.3 के उदाहरण 2 को लें, अर्थात् 2 पेंसिल और 3 रबड़ों का मूल्य ₹ 9 है और 4 पेंसिल और 6 रबड़ों का मूल्य ₹ 18 है। प्रत्येक पेंसिल और प्रत्येक रबड़ का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : रैखिक समीकरण युग्म जो बने थे वे हैं:

$$2x + 3y = 9 \qquad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \qquad (2)$$

हम पहले समीकरण $2x + 3y = 9$ से, x का मान y के पदों में व्यक्त करते हैं और पाते हैं :

$$x = \frac{9 - 3y}{2} \qquad (3)$$

अब हम x के इस मान को समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करके प्राप्त करते हैं:

$$\frac{4(9 - 3y)}{2} + 6y = 18$$

अर्थात् $18 - 6y + 6y = 18$

अर्थात् $18 = 18$

यह कथन y के सभी मानों के लिए सत्य है। यद्यपि, इससे y का कोई मान हल के रूप में नहीं प्राप्त होता है। इसलिए हम x का कोई निश्चित मान नहीं पाते हैं। यह स्थिति इसलिए पैदा हुई है कि दोनों दिए गए समीकरण एक ही हैं। अतः समीकरणों (1) और (2) के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। ध्यान दीजिए कि समीकरणों का यही हल ग्राफीय विधि से मिला है (अनुच्छेद 3.2 की आकृति 3.3 का संदर्भ लीजिए)। हम एक पेंसिल तथा एक रबड़ का अद्वितीय मूल्य नहीं प्राप्त कर सकते हैं, क्योंकि दी हुई स्थिति में बहुत से सार्व (सर्वनिष्ठ) हल हैं।

उदाहरण 10 : आइए अनुच्छेद 3.2 का उदाहरण 3 लें। क्या रेल पटरियाँ एक दूसरे को काटेंगी?

हल : इसमें बनाए गए रैखिक समीकरण थे:

$$x + 2y - 4 = 0 \quad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \quad (2)$$

समीकरण (1) से x को y के पदों में व्यक्त करके, हम पाते हैं:

$$x = 4 - 2y$$

अब, x के इस मान को समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करके हम पाते हैं:

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

अर्थात् $8 - 12 = 0$

अर्थात् $-4 = 0$

जो कि एक असत्य कथन है।

अत:, दिए गए समीकरणों का कोई सार्व हल नहीं है। इसलिए, दोनों पटरियाँ एक दूसरे को नहीं काटेंगी।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए:

(i) $x + y = 14$
$x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$
$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$
$9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$
$0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$
$\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. $2x + 3y = 11$ और $2x - 4y = -24$ को हल कीजिए और इससे 'm' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $y = mx + 3$ हो

3. निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरण युग्म बनाइए और उनके हल प्रतिस्थापन विधि द्वारा ज्ञात कीजिए:

(i) दो संख्याओं का अंतर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

(ii) दो संपूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18 डिग्री अधिक है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

(iii) एक क्रिकेट टीम के कोच ने 7 बल्ले तथा 6 गेंदें ₹ 3800 में खरीदीं। बाद में, उसने 3 बल्ले तथा 5 गेंदें ₹ 1750 में खरीदी। प्रत्येक बल्ले और प्रत्येक गेंद का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(iv) एक नगर में टैक्सी के भाड़े में एक नियत भाड़े के अतिरिक्त चली गई दूरी पर भाड़ा सम्मिलित किया जाता है। 10 km दूरी के लिए भाड़ा ₹ 105 है तथा 15 km के लिए भाड़ा ₹ 155 है। नियत भाड़ा तथा प्रति km भाड़ा क्या है? एक व्यक्ति को 25 km यात्रा करने के लिए कितना भाड़ा देना होगा?

(v) यदि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में 2 जोड़ दिया जाए, तो वह $\frac{9}{11}$ हो जाती है। यदि अंश और हर दोनों में 3 जोड़ दिया जाए, तो वह $\frac{5}{6}$ हो जाती है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

(vi) पाँच वर्ष बाद जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु से तीन गुनी हो जाएगी। पाँच वर्ष पूर्व जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु की सात गुनी थी। उनकी वर्तमान आयु क्या हैं?

3.4.2 विलोपन (Elimination) विधि

अब आइए एक और विधि पर विचार करें जिसे एक चर को विलुप्त करने की विधि कहा जाता है। यह कभी-कभी प्रतिस्थापन विधि से अधिक सुविधाजनक रहती है। आइए अब देखें कि यह विधि कैसे की जाती है।

उदाहरण 11 : दो व्यक्तियों की आय का अनुपात 9 : 7 है और उनके खर्चों का अनुपात 4 : 3 है। यदि प्रत्येक व्यक्ति प्रति महीने में 2000 रु बचा लेता है, तो उनकी मासिक आय ज्ञात कीजिए।

हल : आइए दोनों व्यक्तियों की मासिक आय को क्रमशः $9x$ रु तथा $7x$ रु से निरूपित करें और उनके खर्चों को क्रमशः $4y$ रु और $3y$ रु से निरूपित करें। तब, उस स्थिति में बने समीकरण हैं:

$$9x - 4y = 2000 \quad (1)$$

और

$$7x - 3y = 2000 \quad (2)$$

चरण 1 : y के गुणकों को समान करने के लिए समीकरण (1) को 3 से तथा समीकरण (2) को 4 से गुणा कीजिए। तब हम निम्नलिखित समीकरण प्राप्त करते हैं:

$$27x - 12y = 6000 \quad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \quad (4)$$

चरण 2 : y को विलुप्त (Eliminate) करने के लिए समीकरण (3) को समीकरण (4) में से घटाइए, क्योंकि y के गुणांक समान हैं, इसलिए हम पाते हैं:

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$

अर्थात् $$x = 2000$$

चरण 3 : x का मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं:

$$9(2000) - 4y = 2000$$

अर्थात् $$y = 4000$$

अतः समीकरणों के युग्म का हल $x = 2000, y = 4000$ है। इसलिए, व्यक्तियों की मासिक आय क्रमशः ₹ 18000 तथा ₹ 14000 हैं।

सत्यापन : 18000 : 14000 = 9 : 7 है। साथ ही, उनके खर्चों का अनुपात

18000 – 2000 : 14000 – 2000 = 16000 : 12000 = 4 : 3 है।

टिप्पणी :

1. उपर्युक्त उदाहरण को हल करने में, उपयोग की गई विधि को **विलोपन विधि (elimination method)** कहते हैं, क्योंकि हम सर्वप्रथम एक चर को विलुप्त करके, एक चर में एक रैखिक समीकरण प्राप्त करते हैं। उपर्युक्त उदाहरण में, हमने y को विलुप्त किया है। हम x को भी विलुप्त कर सकते थे। इस प्रकार भी समीकरणों को हल करने का प्रयत्न कीजिए।
2. आप इसको हल करने के लिए प्रतिस्थापन विधि या ग्राफीय विधि का प्रयोग भी कर सकते थे। इन विधियों से भी हल कीजिए और देखिए कौन-सी विधि सबसे उपयुक्त है।

आइए अब हम विलोपन विधि के प्रयोग के विभिन्न चरण बताएँ:

चरण 1 : सर्वप्रथम दोनों समीकरणों को उपयुक्त शून्येतर अचरों से, किसी एक चर (x अथवा y) के गुणांकों को संख्यात्मक रूप में समान करने के लिए, गुणा कीजिए।

चरण 2 : पुनः एक समीकरण को दूसरे में जोड़ें या उसमें से घटाएँ जिससे कि एक चर विलुप्त हो जाए। यदि आप एक चर में समीकरण पाते हैं, तो चरण 3 में जाइए।

यदि चरण 2 में, हमें चर रहित एक सत्य कथन प्राप्त हो, तो मूल समीकरण युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

यदि चरण 2 में, हमें एक चर रहित असत्य कथन मिले, तो मूल समीकरण युग्म का कोई हल नहीं है, अर्थात् यह असंगत है।

चरण 3 : इस प्रकार एक चर (x या y) में प्राप्त समीकरण को, उस चर का मान ज्ञात करने के लिए, हल कीजिए।

चरण 4 : x (या y) के इस मान को मूल समीकरणों में से किसी एक में, दूसरे चर का मान ज्ञात करने के लिए, प्रतिस्थापित कीजिए।

अब इसे समझाने के लिए, हम कुछ और उदाहरण हल करते हैं :

उदाहरण 12 : विलोपन विधि का प्रयोग करके, निम्न रैखिक समीकरण युग्म के सभी संभव हल ज्ञात कीजिए:

$$2x + 3y = 8 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (2)$$

हल :

चरण 1 : समीकरण (1) को 2 से तथा समीकरण (2) को 1 से, x के गुणांकों को समान करने के लिए, गुणा करिए। तब हम निम्न समीकरण पाते हैं:

$$4x + 6y = 16 \quad (3)$$

$$4x + 6y = 7 \quad (4)$$

चरण 2 : समीकरण (4) को समीकरण (3) में से घटाने पर,

$$(4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

अर्थात् $0 = 9$, जो एक असत्य कथन है।

अतः, समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं है।

उदाहरण 13 : दो अंकों की एक संख्या एवं उसके अंकों को उलटने पर बनी संख्या का योग 66 है। यदि संख्या के अंकों का अंतर 2 हो, तो संख्या ज्ञात कीजिए। ऐसी संख्याएँ कितनी हैं?

हल : माना प्रथम संख्या की दहाई तथा इकाई के अंक क्रमशः x और y हैं। इसलिए, प्रथम संख्या को प्रसारित रूप में $10x + y$ लिख सकते हैं [उदाहरण के लिए, $56 = 10(5) + 6$]।

जब अंक उलट जाते हैं, तो x इकाई का अंक बन जाता है तथा y दहाई का अंक। यह संख्या प्रसारित रूप में $10y + x$ है [उदाहरण के लिए, जब 56 को उलट दिया जाता है, तो हम पाते हैं: $65 = 10(6) + 5$]।

दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार,

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

अर्थात्

$$11(x + y) = 66$$

अर्थात् $x + y = 6$ (1)

हमें यह भी दिया गया है कि अंकों का अंतर 2 है। इसलिए,

या तो $x - y = 2$ (2)

या $y - x = 2$ (3)

यदि $x - y = 2$ है, तो (1) और (2) को विलोपन विधि से हल करने पर, $x = 4$ और $y = 2$ प्राप्त होता है। इस स्थिति में, हमें संख्या 42 प्राप्त होती है।

यदि $y - x = 2$ है, तो (1) और (3) को विलोपन विधि से हल करने पर, हमें $x = 2$ और $y = 4$ प्राप्त होता है। इस स्थिति में, हमें संख्या 24 प्राप्त होती है।

इस प्रकार ऐसी दो संख्याएँ 42 और 24 हैं।

सत्यापन : यहाँ $42 + 24 = 66$ और $4 - 2 = 2$ है तथा $24 + 42 = 66$ और $4 - 2 = 2$ है।

प्रश्नावली 3.4

1. निम्न समीकरणों के युग्म को विलोपन विधि तथा प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए। कौन-सी विधि अधिक उपयुक्त है?

(i) $x + y = 5$ और $2x - 3y = 4$ (ii) $3x + 4y = 10$ और $2x - 2y = 2$

(iii) $3x - 5y - 4 = 0$ और $9x = 2y + 7$ (iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ और $x - \frac{y}{3} = 3$

2. निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके हल (यदि उनका अस्तित्व हो) विलोपन विधि से ज्ञात कीजिए :

(i) यदि हम अंश में 1 जोड़ दें तथा हर में से 1 घटा दें, तो भिन्न 1 में बदल जाती है। यदि हर में 1 जोड़ दें, तो यह $\frac{1}{2}$ हो जाती है। वह भिन्न क्या है?

(ii) पाँच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की आयु की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात्, नूरी की आयु सोनू की आयु की दो गुनी हो जाएगी। नूरी और सोनू की आयु कितनी है।

(iii) दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 9 है। इस संख्या का नौ गुना, संख्या के अंकों को पलटने से बनी संख्या का दो गुना है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

(iv) मीना ₹ 2000 निकालने के लिए एक बैंक गई। उसने खजाँची से ₹ 50 तथा ₹ 100 के नोट देने के लिए कहा। मीना ने कुल 25 नोट प्राप्त किए। ज्ञात कीजिए कि उसने ₹ 50 और ₹ 100 के कितने-कितने नोट प्राप्त किए।

(v) किराए पर पुस्तकें देने वाले किसी पुस्तकालय का प्रथम तीन दिनों का एक नियत किराया है तथा उसके बाद प्रत्येक अतिरिक्त दिन का अलग किराया है। सरिता ने सात दिनों तक एक पुस्तक रखने के लिए ₹ 27 अदा किए, जबकि सूसी ने एक पुस्तक पाँच दिनों तक रखने के ₹ 21 अदा किए। नियत किराया तथा प्रत्येक अतिरिक्त दिन का किराया ज्ञात कीजिए।

3.4.3 वज्र-गुणन विधि

अब तक, आपने पढ़ा है कि दो चरों के रैखिक समीकरण युग्म को कैसे ग्राफीय, प्रतिस्थापन एवं विलोपन विधियों द्वारा हल किया जा सकता है। यहाँ हम एक रैखिक समीकरण युग्म को हल करने के लिए एक और बीजगणितीय विधि का परिचय देते हैं, जो कई कारणों से इन समीकरणों को हल करने की बहुत उपयोगी विधि है। इससे पूर्व कि हम आगे बढ़ें, आइए निम्न स्थिति का अवलोकन करें:

5 संतरे और 3 सेबों का मूल्य ₹ 35 है तथा 2 संतरे और 4 सेबों का मूल्य ₹ 28 है। आइए एक संतरे तथा एक सेब का मूल्य ज्ञात करें।

मान लें कि एक संतरे का मूल्य ₹ x और एक सेब का मूल्य ₹ y है। तब, समीकरण बनती हैं:

$$5x + 3y = 35, \text{ अर्थात् } 5x + 3y - 35 = 0 \qquad (1)$$

और

$$2x + 4y = 28, \text{ अर्थात् } 2x + 4y - 28 = 0 \qquad (2)$$

आइए विलोपन विधि से इन समीकरणों को हल करें।

समीकरण (1) को 4 तथा समीकरण (2) को 3 से गुणा करने पर, हम पाते हैं:

$$(4)(5)x + (4)(3)y + (4)(-35) = 0 \qquad (3)$$

$$(3)(2)x + (3)(4)y + (3)(-28) = 0 \qquad (4)$$

समीकरण (4) को समीकरण (3) में से घटाने पर, हम पाते हैं:

$$[(5)(4) - (3)(2)]x + [(4)(3) - (3)(4)]y + [4(-35) - (3)(-28)] = 0$$

इसलिए

$$x = \frac{-[(4)(-35) - (3)(-28)]}{(5)(4) - (3)(2)}$$

अर्थात्

$$x = \frac{(3)(-28) - (4)(-35)}{(5)(4) - (2)(3)} \qquad (5)$$

यदि समीकरणों (1) और (2) को $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के रूप में लिखा जाए, तो हम पाते हैं:

$$a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = -35, a_2 = 2, b_2 = 4, c_2 = -28$$

तब समीकरण (5) को इस रूप में लिख सकते हैं: $x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

इसी प्रकार, आप प्राप्त कर सकते हैं: $y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

समीकरण (5) को सरल करने पर, हम पाते हैं:

$$x = \frac{-84 + 140}{20 - 6} = 4$$

इसी प्रकार $$y = \frac{(-35)(2) - (5)(-28)}{20 - 6} = \frac{-70 + 140}{14} = 5$$

अत:, $x = 4, y = 5$ दिए गए समीकरणों के युग्म का हल है।

तब, एक संतरे का मूल्य ₹ 4 और एक सेब का मूल्य ₹ 5 है।

सत्यापन : 5 संतरों का मूल्य + 3 सेबों का मूल्य = ₹ 20 + ₹ 15 = ₹ 35

2 संतरों का मूल्य + 4 सेबों का मूल्य = ₹ 8 + ₹ 20 = ₹ 28

आइए अब देखें कि कैसे यह विधि दो चरों में किसी भी रैखिक समीकरणों के युग्म

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (1)$$

और $$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (2)$$

को हल करने में प्रयुक्त होती है। उपरोक्त विधि से x और y के मान प्राप्त करने के लिए हम निम्न प्रकार से आगे पढ़ेंगे।

चरण 1 : समीकरण (1) को b_2 तथा समीकरण (2) को b_1 से गुणा करके, हम पाते हैं:

$$b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \quad (3)$$

$$b_1a_2x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \quad (4)$$

चरण 2 : समीकरण (4) को (3) में से घटाने पर, हम पाते हैं :

$$(b_2a_1 - b_1a_2)\,x + (b_2b_1 - b_1b_2)\,y + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0$$

अर्थात् $$(b_2a_1 - b_1a_2)\,x = b_1c_2 - b_2c_1$$

अत: $$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ \text{जबकि } b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0 \text{ हो} \quad (5)$$

चरण 3 : x का मान (1) या (2) में रखने पर, हम पाते हैं:

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (6)$$

अब दो स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं:

स्थिति 1 : $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ है। इस स्थिति में, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ है। तब, रैखिक समीकरणों के युग्म का एक अद्वितीय हल है।

स्थिति 2 : $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ है। यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ है, तो $a_1 = k\,a_2$, $b_1 = k\,b_2$ होगा।

a_1 और b_1 के मानों को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं:

$$k\,(a_2x + b_2y) + c_1 = 0 \qquad (7)$$

यह देखा जा सकता है कि समीकरण (7) और (2) दोनों केवल तभी संतुष्ट हो सकते हैं, यदि $c_1 = k\,c_2$ हो, अर्थात् $\frac{c_1}{c_2} = k$ हो।

यदि $c_1 = k\,c_2$ हो, तो समीकरण (2) का कोई भी हल समीकरण (1) को संतुष्ट करेगा और विलोमत: भी ऐसा होगा। इसलिए, यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$ हो, तो (1) और (2) से निरूपित रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।

यदि $c_1 \neq k\,c_2$ हो, तो समीकरण (1) का कोई भी हल समीकरण (2) को संतुष्ट नहीं करेगा और विलोमत: भी ऐसा ही होगा। अत: इस युग्म का कोई हल नहीं होगा।

(1) और (2) द्वारा दी गई रैखिक समीकरणों के युग्म के बारे में उपर्युक्त चर्चा को संक्षेप में हम निम्न प्रकार से दे सकते हैं:

(i) जब $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ है, तो हमें अद्वितीय हल (Unique solution) प्राप्त होता है।

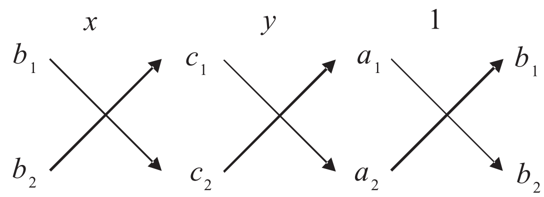
(ii) जब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ है, तो युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।

(iii) जब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ है, तो युग्म का कोई हल नहीं है।

ध्यान दीजिए कि समीकरण (5) और (6) द्वारा प्राप्त हल को आप निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (8)$$

उपर्युक्त परिणाम को याद करने के लिए, आपको निम्न चित्र उपयोगी हो सकता है :



दो संख्याओं के बीच के तीर के निशान सूचित करते हैं कि इन्हें गुणा करना है तथा दूसरे गुणनफल को प्रथम गुणनफल में से घटाना है।

इस विधि से रैखिक समीकरणों के युग्म को हल करने के लिए, हम निम्न चरणों द्वारा आगे बढ़ेंगे:

चरण 1 : दी गई समीकरणों को (1) और (2) के रूप में लिखिए।

चरण 2 : उपर्युक्त चित्र की सहायता से, (8) में दी गई समीकरणों को लिखिए।

चरण 3 : x और y को ज्ञात कीजिए, जबकि $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ हो।

उपर्युक्त चरण 2 आपको इंगित करता है कि इसे **वज्र-गुणन विधि** क्यों कहा जाता है।

चंडीगढ

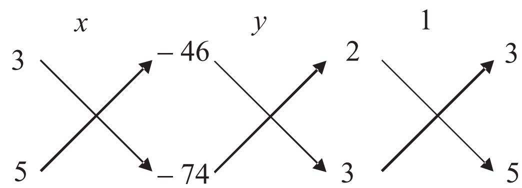
उदाहरण 14 : चंडीगढ़ के एक बस स्टैंड से यदि हम दो टिकट जीरकपुर के तथा 3 टिकट राजपुरा के खरीदें, तो कुल लागत ₹ 46 है। परंतु यदि हम 3 टिकट जीरकपुर के और 5 टिकट राजपुरा के खरीदें, तो कुल लागत ₹ 74 है। बस स्टैंड से जीरकपुर का किराया तथा राजपुरा का किराया ज्ञात कीजिए।

हल : माना चंडीगढ़ के बस स्टैंड से, जीरकपुर का किराया ₹ x तथा राजपुरा का किराया ₹ y है। दी गई सूचनाओं से, हम पाते हैं:

$$2x + 3y = 46, \text{ अर्थात् } 2x + 3y - 46 = 0 \qquad (1)$$

$$3x + 5y = 74, \text{ अर्थात् } 3x + 5y - 74 = 0 \qquad (2)$$

वज्र-गुणन विधि से इन समीकरणों को हल करने के लिए, हम निम्न प्रकार से चित्र खींचते हैं:



तब $$\frac{x}{(3)(-74)-(5)(-46)} = \frac{y}{(-46)(3)-(-74)(2)} = \frac{1}{(2)(5)-(3)(3)}$$

अर्थात् $$\frac{x}{-222+230} = \frac{y}{-138+148} = \frac{1}{10-9}$$

अर्थात् $$\frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

अर्थात् $$\frac{x}{8} = \frac{1}{1} \text{ और } \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

अर्थात् $$x = 8 \text{ और } y = 10$$

अतः, चंडीगढ़ के बस स्टैंड से, जीरकपुर का किराया ₹ 8 तथा राजपुरा का किराया ₹ 10 है।

सत्यापन : आप प्रारंभिक समस्या से जाँच सकते हैं कि हल जो हमने ज्ञात किए हैं वे सही हैं।

उदाहरण 15 : p के किन मानों के लिए, निम्न समीकरणों के युग्म का एक अद्वितीय हल है?

$$4x + py + 8 = 0$$
$$2x + 2y + 2 = 0$$

हल : यहाँ $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $b_1 = p$, $b_2 = 2$ है।

अब दिए गए युग्म का एक अद्वितीय हल होने के लिए, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ होगा।

अर्थात् $$\frac{4}{2} \neq \frac{p}{2}$$

अर्थात् $$p \neq 4$$

अतः, 4 के अतिरिक्त, p के प्रत्येक मान के लिए दिए हुए समीकरण युग्म का एक अद्वितीय हल होगा।

उदाहरण 16 : k के किस मान के लिए, निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे?

$$kx + 3y - (k - 3) = 0$$
$$12x + ky - k = 0$$

हल : यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{12}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{k}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{k-3}{k}$ है।

रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होने के लिए, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ होना चाहिए।

इसलिए हमें चाहिए $\frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$

या $\frac{k}{12} = \frac{3}{k}$

जिससे $k^2 = 36$ प्राप्त होता है, अर्थात् $k = \pm 6$ हैं।

साथ ही $\frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$

जिससे $3k = k^2 - 3k$ प्राप्त होता है, अर्थात् $6k = k^2$ है।

जिसका अर्थ $k = 0$ या $k = 6$ है।

इसलिए, k का मान, जो दोनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है, $k = 6$ है। इस मान के लिए समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

प्रश्नावली 3.5

1. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों में से किसका एक अद्वितीय हल है, किसका कोई हल नहीं है या किसके अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। अद्वितीय हल की स्थिति में, उसे वज्र-गुणन विधि से ज्ञात कीजिए।

(i) $x - 3y - 3 = 0$
$3x - 9y - 2 = 0$

(ii) $2x + y = 5$
$3x + 2y = 8$

(iii) $3x - 5y = 20$
$6x - 10y = 40$

(iv) $x - 3y - 7 = 0$
$3x - 3y - 15 = 0$

2. (i) a और b के किन मानों के लिए, निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे?

$$2x + 3y = 7$$
$$(a - b)\,x + (a + b)\,y = 3a + b - 2$$

(ii) k के किस मान के लिए, निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं है?

$$3x + y = 1$$

$$(2k - 1)\,x + (k - 1)\,y = 2k + 1$$

3. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को प्रतिस्थापन एवं वज्र-गुणन विधियों से हल कीजिए। किस विधि को आप अधिक उपयुक्त मानते हैं?

$$8x + 5y = 9$$

$$3x + 2y = 4$$

4. निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके हल (यदि उनका अस्तित्व हो) किसी बीजगणितीय विधि से ज्ञात कीजिए:

(i) एक छात्रावास के मासिक व्यय का एक भाग नियत है तथा शेष इस पर निर्भर करता है कि छात्र ने कितने दिन भोजन लिया है। जब एक विद्यार्थी A को, जो 20 दिन भोजन करता है, ₹ 1000 छात्रावास के व्यय के लिए अदा करने पड़ते हैं, जबकि एक विद्यार्थी B को, जो 26 दिन भोजन करता है छात्रावास के व्यय के लिए ₹ 1180 अदा करने पड़ते हैं। नियत व्यय और प्रतिदिन के भोजन का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(ii) एक भिन्न $\frac{1}{3}$ हो जाती है, जब उसके अंश से 1 घटाया जाता है और वह $\frac{1}{4}$ हो जाती है, जब हर में 8 जोड़ दिया जाता है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

(iii) यश ने एक टेस्ट में 40 अंक अर्जित किए, जब उसे प्रत्येक सही उत्तर पर 3 अंक मिले तथा अशुद्ध उत्तर पर 1 अंक की कटौती की गई। यदि उसे सही उत्तर पर 4 अंक मिलते तथा अशुद्ध उत्तर पर 2 अंक कटते, तो यश 50 अंक अर्जित करता। टेस्ट में कितने पश्न थे?

(iv) एक राजमार्ग पर दो स्थान A और B, 100 km की दूरी पर हैं। एक कार A से तथा दूसरी कार B से एक ही समय चलना प्रारम्भ करती है। यदि ये कारें भिन्न-भिन्न चालों से एक ही दिशा में चलती हैं, तो वे 5 घंटे पश्चात् मिलती हैं। यदि ये कारें एक दूसरे की तरफ या विपरीत दिशा में चलती हैं तो ये एक 1 घंटे के पश्चात् मिलेंगी । दोनों कारों की चाल ज्ञात कीजिए।

(v) एक आयत का क्षेत्रफल 9 वर्ग इकाई कम हो जाता है, यदि उसकी लंबाई 5 इकाई कम कर दी जाती है और चौड़ाई 3 इकाई बढ़ा दी जाती है। यदि हम लंबाई को 3 इकाई और चौड़ाई को 2 इकाई बढ़ा दें, तो क्षेत्रफल 67 वर्ग इकाई बढ़ जाता है। आयत की विमाएँ (लंबाई और चौड़ाई) ज्ञात कीजिए।

3.5 दो चरों के रैखिक समीकरणों के युग्म में बदले जा सकने वाले समीकरण

इस अनुच्छेद में, हम ऐसे समीकरणों के युग्मों के बारे में चर्चा करेंगे जो रैखिक नहीं है, परंतु कुछ उपयुक्त प्रतिस्थापनों द्वारा इन्हें रैखिक समीकरणों के रूप में बदला जा सकता है। हम इस प्रक्रिया को कुछ उदाहरणों द्वारा समझाएँगे।

उदाहरण 17 : समीकरणों के निम्न युग्म को हल कीजिए :

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y} = 13$$

$$\frac{5}{x}-\frac{4}{y} = -2$$

हल : आइए दिए गए समीकरणों के युग्म को

$$2\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{y}\right) = 13 \qquad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right)-4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \qquad (2)$$

के रूप में लिखें।

ये समीकरण $ax + by + c = 0$ के रूप में नहीं हैं। परंतु, यदि हम समीकरण (1) और (2) में, $\frac{1}{x} = p$ और $\frac{1}{y} = q$ प्रतिस्थापित करें, तो हम पाते हैं:

$$2p + 3q = 13 \qquad (3)$$

$$5p - 4q = -2 \qquad (4)$$

अतः, हमने समीकरणों को रैखिक समीकरणों के युग्म के रूप में व्यक्त कर दिया है। अब आप इन्हें किसी भी विधि से हल करके $p = 2, q = 3$ प्राप्त कर सकते हैं।

आप जानते हैं कि $p = \frac{1}{x}$ और $q = \frac{1}{y}$ है।

p और q के मानों को प्रतिस्थापित कर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{1}{x} = 2, \text{ अर्थात् } x = \frac{1}{2} \text{ और } \frac{1}{y} = 3, \text{ अर्थात् } y = \frac{1}{3}$$

सत्यापन : दोनों समीकरणों में $x = \frac{1}{2}$ और $y = \frac{1}{3}$ रखने पर, हम पाते हैं कि दोनों समीकरण संतुष्ट हो जाते हैं।

उदाहरण 18 : निम्न समीकरण युग्म को रैखिक समीकरणों के युग्म में बदल कर हल कीजिए:

$$\frac{5}{x-1}+\frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{6}{x-1}-\frac{3}{y-2} = 1$$

हल : आइए $\frac{1}{x-1}=p$ और $\frac{1}{y-2}=q$ रखें। तब, दी गई समीकरण

$$5\left(\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{y-2} = 2 \qquad (1)$$

$$6\left(\frac{1}{x-1}\right)-3\left(\frac{1}{y-2}\right) = 1 \qquad (2)$$

$$5p + q = 2 \qquad (3)$$

$$6p - 3q = 1 \qquad (4)$$

के रूप में लिखी जा सकती हैं:

समीरकण (3) और (4) व्यापक रूप में एक रैखिक समीकरण युग्म बनाती हैं। अब आप इन समीकरणों को हल करने के लिए, किसी भी विधि का प्रयोग कर सकते हैं। हम पाते हैं, $p=\frac{1}{3}$ और $q=\frac{1}{3}$

अब p के लिए, $\frac{1}{x-1}$ प्रतिस्थापित कर हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$$

अर्थात् $x - 1 = 3$, अर्थात् $x = 4$ है।

इसी प्रकार q के लिए $\frac{1}{y-2}$, रखने पर हम पाते हैं:

$$\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$$

अर्थात् $3 = y-2$, अर्थात् $y = 5$ है।

अतः, दिए गए समीकरण युग्म का अभीष्ट हल $x = 4, y = 5$ है।

सत्यापन : (1) और (2) में $x = 4$ और $y = 5$ प्रतिस्थापित करने पर जाँच कीजिए कि क्या वे इन्हें संतुष्ट करते हैं।

उदाहरण 19 : एक नाव 10 घंटे में धारा के प्रतिकूल 30 km तथा धारा के अनुकूल 44 km जाती है। 13 घंटे में वह 40 km धारा के प्रतिकूल एवं 55 km धारा के अनुकूल जाती है। धारा की चाल तथा नाव की स्थिर पानी में चाल ज्ञात कीजिए।

हल : माना नाव की स्थिर जल में चाल x km/h है तथा धारा की चाल y km/h है। साथ ही, नाव की धारा के अनुकूल चाल $= (x + y)$ km/h तथा नाव की धारा के प्रतिकूल चाल $= (x - y)$ km/h होगी।

साथ ही,
$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

प्रथम स्थिति में, जब नाव 30 km धारा के प्रतिकूल चलती है, माना घंटों में लिया गया समय t_1 है। तब

$$t_1 = \frac{30}{(x-y)}$$

माना t_2 घंटों में वह समय है जिसमें नाव 44 km धारा के अनुकूल चलती है। तब, $t_2 = \frac{44}{x+y}$ है। कुल लगा समय $t_1 + t_2 = 10$ घंटा है। अत:, हमें समीकरण मिलता है:

$$\frac{30}{x-y} + \frac{44}{x+y} = 10 \qquad (1)$$

दूसरी स्थिति में, 13 घंटों में वह 40 km धारा के प्रतिकूल और 55 km धारा के अनुकूल चलती है। हम इससे समीकरण प्राप्त करते हैं :

$$\frac{40}{x-y} + \frac{55}{x+y} = 13 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{x-y} = u \text{ और } \frac{1}{x+y} = v \text{ रखिए।} \qquad (3)$$

इन मानों को समीकरण (1) और (2) में प्रतिस्थापित करने पर, हम रैखिक समीकरणों का निम्न युग्म प्राप्त करते हैं :

$$30u + 44v = 10 \quad \text{या} \quad 30u + 44v - 10 = 0 \qquad (4)$$

$$40u + 55v = 13 \quad \text{या} \quad 40u + 55v - 13 = 0 \qquad (5)$$

वज्र-गुणन विधि प्रयोग करने पर, हम पाते हैं:

$$\frac{u}{44(-13)-55(-10)} = \frac{v}{40(-10)-30(-13)} = \frac{1}{30(55)-44(40)}$$

अर्थात् $$\frac{u}{-22} = \frac{v}{-10} = \frac{1}{-110}$$

अर्थात् $$u = \frac{1}{5},\quad v = \frac{1}{11}$$

अब u, v के इन मानों को समीकरणों (3) में रखने पर, हम पाते हैं :

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{5} \text{ और } \frac{1}{x+y} = \frac{1}{11}$$

अर्थात् $$x - y = 5 \text{ और } x + y = 11 \qquad (6)$$

इन समीकरणों को जोड़ने पर, हम पाते हैं:

$$2x = 16$$

अर्थात् $$x = 8$$

(6) में दी हुई समीकरणों को घटाने पर, हम पाते हैं :

$$2y = 6$$

अर्थात् $$y = 3$$

अत:, नाव की स्थिर जल में चाल 8 km/h तथा धारा की चाल 3 km/h है।

सत्यापन : जाँच कीजिए कि ये प्रारंभिक समस्या के प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं।

प्रश्नावली 3.6

1. निम्न समीकरणों के युग्मों को रैखिक समीकरणों के युग्म में बदल करके हल कीजिए:

(i) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2$

$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{13}{6}$

(ii) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$

$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$

(iii) $\frac{4}{x} + 3y = 14$

$\frac{3}{x} - 4y = 23$

(iv) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$

$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$

(v) $\dfrac{7x - 2y}{xy} = 5$

$\dfrac{8x + 7y}{xy} = 15$

(vi) $6x + 3y = 6xy$

$2x + 4y = 5xy$

(vii) $\dfrac{10}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = 4$

$\dfrac{15}{x+y} - \dfrac{5}{x-y} = -2$

(viii) $\dfrac{1}{3x + y} + \dfrac{1}{3x - y} = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{1}{2(3x + y)} - \dfrac{1}{2(3x - y)} = \dfrac{-1}{8}$

2. निम्न समस्याओं को रैखिक समीकरण युग्म के रूप में व्यक्त कीजिए और फिर उनके हल ज्ञात कीजिए:

(i) रितु धारा के अनुकूल 2 घंटे में 20 km तैर सकती है और धारा के प्रतिकूल 2 घंटे में 4 km तैर सकती है। उसकी स्थिर जल में तैरने की चाल तथा धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

(ii) 2 महिलाएँ एवं 5 पुरुष एक कसीदे के काम को साथ-साथ 4 दिन में पूरा कर सकते हैं, जबकि 3 महिलाएँ एवं 6 पुरुष इसको 3 दिन में पूरा कर सकते हैं। ज्ञात कीजिए कि इसी कार्य को करने में एक अकेली महिला कितना समय लेगी। पुन: इसी कार्य को करने में एक पुरुष कितना समय लेगा।

(iii) रूही 300 km दूरी पर स्थित अपने घर जाने के लिए कुछ दूरी रेलगाड़ी द्वारा तथा कुछ दूरी बस द्वारा तय करती है। यदि वह 60 km रेलगाड़ी द्वारा तथा शेष बस द्वारा यात्रा करती है तो उसे 4 घंटे लगते हैं। यदि वह 100 km रेलगाड़ी से तथा शेष बस से यात्रा करे, तो उसे 10 मिनट अधिक लगते हैं। रेलगाड़ी एवं बस की क्रमश: चाल ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 3.7 (ऐच्छिक)*

1. दो मित्रों अनी और बीजू की आयु में 3 वर्ष का अंतर है। अनी के पिता धरम की आयु अनी की आयु की दुगुनी और बीजू की आयु अपनी बहन कैथी की आयु की दुगुनी है। कैथी और धरम की आयु का अंतर 30 वर्ष है। अनी और बीजू की आयु ज्ञात कीजिए।

2. एक मित्र दूसरे से कहता है कि 'यदि मुझे एक सौ रुपये दे दो, तो मैं आपसे दो गुना धनी बन जाऊँगा।' दूसरा उत्तर देता है 'यदि आप मुझे दस रुपये दे दें, तो मैं आपसे छ: गुना धनी बन जाऊँगा।' बताइए कि उनकी क्रमश: क्या संपत्तियाँ हैं? [भास्कर II की बीजगणित से]
[**संकेत:** $x + 100 = 2(y - 100), y + 10 = 6(x - 10)$]

3. एक रेलगाड़ी कुछ दूरी समान चाल से तय करती है। यदि रेलगाड़ी 10 km/h अधिक तेज

* यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

चलती होती, तो उसे नियत समय से 2 घंटे कम लगते और यदि रेलगाड़ी 10 km/h धीमी चलती होती, तो उसे नियत समय से 3 घंटे अधिक लगते। रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

4. एक कक्षा के विद्यार्थियों को पंक्तियों में खड़ा होना है। यदि पंक्ति में 3 विद्यार्थी अधिक होते, तो 1 पंक्ति कम होती। यदि पंक्ति में 3 विद्यार्थी कम होते, तो 2 पंक्तियाँ अधिक बनतीं। कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

5. एक Δ ABC में, $\angle C = 3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$ है। त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

6. समीकरणों $5x - y = 5$ और $3x - y = 3$ के ग्राफ खींचिए। इन रेखाओं और y-अक्ष से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। इस प्रकार बने त्रिभुज के क्षेत्रफल का परिकलन कीजिए।

7. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों को हल कीजिए:

(i) $px + qy = p - q$
$qx - py = p + q$

(ii) $ax + by = c$
$bx + ay = 1 + c$

(iii) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$
$ax + by = a^2 + b^2.$

(iv) $(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$
$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

(v) $152x - 378y = -74$
$-378x + 152y = -604$

8. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है (देखिए आकृति 3.7)। इस चक्रीय चतुर्भुज के कोण ज्ञात कीजिए।

आकृति 3.7

3.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. दो चरों में दो रैखिक समीकरण एक रैखिक समीकरणों का युग्म कहलाता है। रैखिक समीकरण युग्म का सबसे व्यापक रूप है:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

जहाँ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ऐसी वास्तविक संख्याएँ हैं कि $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ है।

2. एक रैखिक समीकरण युग्म को ग्राफीय रूप में निरूपित किया जा सकता है और हल किया जा सकता है

(i) ग्राफीय विधि द्वारा

(ii) बीजगणितीय विधि द्वारा

3. ग्राफीय विधिः

दो चरों में एक रैखिक समीकरण युग्म का ग्राफ दो रेखाएँ निरूपित करता है।

(i) यदि रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं तो, वह बिंदु दोनों समीकरण का अद्वितीय हल होता है। इस स्थिति में, समीकरण युग्म संगत होता है।

(ii) यदि रेखाएँ संपाती हैं, तो उसके अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं–रेखा पर स्थित प्रत्येक बिंदु हल होता है। इस स्थिति में, समीकरण युग्म आश्रित (संगत) होता है।

(iii) यदि रेखाएँ समांतर हैं, तो समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होता है। इस स्थिति में, समीकरण युग्म असंगत होता है।

4. बीजगणितीय विधि **:** हमने एक रैखिक समीकरण युग्म के हल ज्ञात करने के लिए निम्न विधियों की चर्चा की है**:**

(i) प्रतिस्थापन विधि

(ii) विलोपन विधि

(iii) वज्र-गुणन विधि

5. यदि दिए गए रैखिक समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ एक रैखिक समीकरण युग्म को प्रदर्शित करते हैं, तो निम्न स्थितियाँ उत्पन्न हो सकती हैं**:**

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_1}$: इस स्थिति में, रैखिक समीकरण युग्म संगत होता है।

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$: इस स्थिति में, रैखिक समीकरण युग्म असंगत होता है।

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$: इस स्थिति में, रैखिक समीकरण युग्म आश्रित (संगत) होता है।

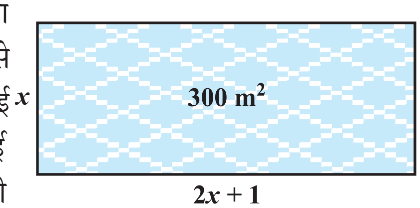
6. अनेक स्थितियाँ हैं जिन्हें गणितीय रूप में ऐसी दो समीकरणों से प्रदर्शित किया जा सकता है, जो प्रारंभ में रैखिक नहीं हों। परंतु हम उन्हें परिवर्तित कर एक रैखिक समीकरण युग्म में बदल सकते हैं।

1063CH04

द्विघात समीकरण (Quadratic Equations) 4

4.1 भूमिका

अध्याय 2 में, आपने विभिन्न प्रकार के बहुपदों का अध्ययन किया है। $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ एक प्रकार का द्विघात बहुपद था। जब हम इस बहुपद को शून्य के तुल्य कर देते हैं, तो हमें एक द्विघात समीकरण प्राप्त हो जाती है। वास्तविक जीवन से संबंधित कई समस्याओं को हल करने में हम द्विघात समीकरणों का प्रयोग करते हैं। उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि एक धर्मार्थ ट्रस्ट 300 वर्ग मीटर क्षेत्रफल का प्रार्थना कक्ष बनाना चाहता है, जिसकी लंबाई उसकी चौड़ाई के दुगुने से एक मीटर अधिक हो। कक्ष की लंबाई और चौड़ाई क्या होनी चाहिए? माना कक्ष की चौड़ाई x मीटर है। तब, उसकी लंबाई $(2x + 1)$ मीटर होनी चाहिए। हम इस सूचना को चित्रीय रूप में आकृति 4.1 जैसा दिखा सकते हैं।



आकृति 4.1

अब कक्ष का क्षेत्रफल $= (2x + 1). x \text{ m}^2 = (2x^2 + x) \text{ m}^2$

इसलिए $2x^2 + x = 300$ (दिया है)

अत: $2x^2 + x - 300 = 0$

इसलिए, कक्ष की चौड़ाई, समीकरण $2x^2 + x - 300 = 0$, जो एक द्विघात समीकरण है, को संतुष्ट करना चाहिए।

अधिकांश लोग विश्वास करते हैं कि बेबीलोनवासियों ने ही सर्वप्रथम द्विघात समीकरणों को हल किया था। उदाहरण के लिए, वे जानते थे कि कैसे दो संख्याओं को ज्ञात किया जा सकता है, जिनका योग तथा गुणनफल दिया हो। ध्यान दीजिए कि यह समस्या

$x^2 - px + q = 0$ के प्रकार के समीकरण को हल करने के तुल्य है। यूनानी गणितज्ञ यूक्लिड ने लंबाइयाँ ज्ञात करने की एक ज्यामितीय विधि विकसित की जिसको हम वर्तमान शब्दावली में द्विघात समीकरण के हल कहते हैं। व्यापक रूप में, द्विघात समीकरणों को हल करने का श्रेय बहुधा प्राचीन भारतीय गणितज्ञों को जाता है। वास्तव में, ब्रह्मगुप्त (ई. 598-665) ने $ax^2 + bx = c$ के रूप के द्विघात समीकरण को हल करने का एक स्पष्ट सूत्र दिया था। बाद में, श्रीधराचार्य (ई. 1025) ने एक सूत्र प्रतिपादित किया, जिसे अब द्विघाती सूत्र के रूप में जाना जाता है, जो पूर्ण वर्ग विधि से द्विघात समीकरण को हल करने पर प्राप्त हुआ (जैसा भास्कर II ने लिखा)। एक अरब गणितज्ञ अल-ख्वारिज़्मी (लगभग ई. 800) ने भी विभिन्न प्रकार के द्विघात समीकरणों का अध्ययन किया। अब्राह्म बार हिय्या हा-नासी यूरो ने 1145 में छपी अपनी पुस्तक 'लिबर इंबाडोरम' में विभिन्न द्विघात समीकरणों के पूर्ण हल दिए।

इस अध्याय में, आप द्विघात समीकरणों और उनके हल ज्ञात करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन करेंगे। दैनिक जीवन की कई स्थितियों में भी आप द्विघात समीकरणों के कुछ उपयोग देखेंगे।

4.2 द्विघात समीकरण

चर x में एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार की होती है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$ है। उदाहरण के लिए, $2x^2 + x - 300 = 0$ एक द्विघात समीकरण है। इसी प्रकार, $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ और $1 - x^2 + 300 = 0$ भी द्विघात समीकरण हैं।

वास्तव में, कोई भी समीकरण $p(x) = 0$, जहाँ $p(x)$, घात 2 का एक बहुपद है, एक द्विघात समीकरण कहलाती है। परंतु जब हम $p(x)$ के पद घातों के घटते क्रम में लिखते हैं, तो हमें समीकरण का मानक रूप प्राप्त होता है। अर्थात् $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, **द्विघात समीकरण का मानक रूप** कहलाता है।

द्विघात समीकरण हमारे आसपास के परिवेश की अनेक स्थितियों एवं गणित के विभिन्न क्षेत्रों में प्रयुक्त होते हैं। आइए हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : निम्न स्थितियों को गणितीय रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) जॉन और जीवंती दोनों के पास कुल मिलाकर 45 कंचे हैं। दोनों पाँच-पाँच कंचे खो देते हैं और अब उनके पास कंचों की संख्या का गुणनफल 124 है। हम जानना चाहेंगे कि आरंभ में उनके पास कितने कंचे थे।

(ii) एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ खिलौने निर्मित करता है। प्रत्येक खिलौने का मूल्य (रुपयों में) 55 में से एक दिन में निर्माण किए गए खिलौने की संख्या को घटाने से

प्राप्त संख्या के बराबर है। किसी एक दिन, कुल निर्माण लागत ₹ 750 थी। हम उस दिन निर्माण किए गए खिलौनों की संख्या ज्ञात करना चाहेंगे।

हल :

(i) माना कि जॉन के कंचों की संख्या x थी।

तब जीवंती के कंचों की संख्या $= 45 - x$ (क्यों?)

जॉन के पास, 5 कंचे खो देने के बाद, बचे कंचों की संख्या $= x - 5$

जीवंती के पास, 5 कंचे खोने के बाद, बचे कंचों की संख्या $= 45 - x - 5$

$$= 40 - x$$

अतः उनका गुणनफल $= (x - 5)(40 - x)$

$$= 40x - x^2 - 200 + 5x$$

$$= - x^2 + 45x - 200$$

अब $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (दिया है कि गुणनफल $= 124$)

अर्थात् $-x^2 + 45x - 324 = 0$

अर्थात् $x^2 - 45x + 324 = 0$

अतः जॉन के पास जितने कंचे थे, जो समीकरण

$$x^2 - 45x + 324 = 0$$

को संतुष्ट करते हैं।

(ii) माना उस दिन निर्मित खिलौनों की संख्या x है।

इसलिए, उस दिन प्रत्येक खिलौने की निर्माण लागत (रुपयों में) $= 55 - x$

अतः, उस दिन कुल निर्माण लागत (रुपयों में) $= x(55 - x)$

इसलिए $x(55 - x) = 750$

अर्थात् $55x - x^2 = 750$

अर्थात् $-x^2 + 55x - 750 = 0$

अर्थात् $x^2 - 55x + 750 = 0$

अतः उस दिन निर्माण किए गए खिलौनों की संख्या द्विघात समीकरण

$$x^2 - 55x + 750 = 0$$

को संतुष्ट करती है।

उदाहरण 2 : जाँच कीजिए कि निम्न द्विघात समीकरण हैं या नहीं:

(i) $(x-2)^2+1=2x-3$ (ii) $x(x+1)+8=(x+2)(x-2)$

(iii) $x(2x+3)=x^2+1$ (iv) $(x+2)^3=x^3-4$

हल :

(i) बायाँ पक्ष $=(x-2)^2+1=x^2-4x+4+1=x^2-4x+5$

इसलिए $(x-2)^2+1=2x-3$ को

$x^2-4x+5=2x-3$ लिखा जा सकता है।

अर्थात् $x^2-6x+8=0$

यह $ax^2+bx+c=0$ के प्रकार का है।

अत: दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

(ii) चूँकि $x(x+1)+8=x^2+x+8$ और $(x+2)(x-2)=x^2-4$ है,

इसलिए $x^2+x+8=x^2-4$

अर्थात् $x+12=0$

यह $ax^2+bx+c=0$ के प्रकार का समीकरण नहीं है। इसलिए, दिया हुआ समीकरण एक द्विघात समीकरण नहीं है।

(iii) यहाँ बायाँ पक्ष $=x(2x+3)=2x^2+3x$

अत: $x(2x+3)=x^2+1$ को लिखा जा सकता है:

$2x^2+3x=x^2+1$

इसलिए $x^2+3x-1=0$ हमें प्राप्त होता है।

यह $ax^2+bx+c=0$ के प्रकार का समीकरण है।

अत:, दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

(iv) यहाँ बायाँ पक्ष $=(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$

अत: $(x+2)^3=x^3-4$ को लिखा जा सकता है:

$x^3+6x^2+12x+8=x^3-4$

अर्थात् $6x^2+12x+12=0$ या $x^2+2x+2=0$

यह $ax^2+bx+c=0$ के प्रकार का समीकरण है।

अत: दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त (ii) में, दिया गया समीकरण देखने में द्विघात समीकरण लगता है, परंतु यह द्विघात समीकरण नहीं है।

उपर्युक्त (iv) में, समीकरण देखने में त्रिघात (घात 3 का समीकरण) लगता है और द्विघात नहीं लगता है। परंतु वह द्विघात समीकरण निकलता है। जैसा आप देखते हैं समीकरण को यह तय करने कि वह द्विघात है अथवा नहीं, हमें उसका सरलीकरण करना आवश्यक है।

प्रश्नावली 4.1

1. जाँच कीजिए कि क्या निम्न द्विघात समीकरण हैं :

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$ (ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$ (iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

(v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ (vi) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

(vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ (viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

2. निम्न स्थितियों को द्विघात समीकरणों के रूप में निरूपित कीजिए :

(i) एक आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल 528 m^2 है। क्षेत्र की लंबाई (मीटरों में) चौड़ाई के दुगुने से एक अधिक है। हमें भूखंड की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात करनी है।

(ii) दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 306 है। हमें पूर्णांकों को ज्ञात करना है।

(iii) रोहन की माँ उससे 26 वर्ष बड़ी है। उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल अब से तीन वर्ष पश्चात् 360 हो जाएगी। हमें रोहन की वर्तमान आयु ज्ञात करनी है।

(iv) एक रेलगाड़ी 480 km की दूरी समान चाल से तय करती है। यदि इसकी चाल 8 km/h कम होती, तो वह उसी दूरी को तय करने में 3 घंटे अधिक लेती। हमें रेलगाड़ी की चाल ज्ञात करनी है।

4.3 गुणनखंडों द्वारा द्विघात समीकरण का हल

द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ पर विचार कीजिए। यदि हम इस समीकरण के बाएँ पक्ष में x को 1 से प्रतिस्थापित करें, तो हमें प्राप्त होता है: $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0$ = समीकरण का दाँया पक्ष। हम कहते हैं कि 1 द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ का एक मूल है। इसका यह भी अर्थ है कि 1 द्विघात बहुपद $2x^2 - 3x + 1$ का एक शून्यक है।

व्यापक रूप में, एक वास्तविक संख्या α द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ का एक मूल कहलाती है, यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ हो। हम यह भी कहते हैं कि **$x = \alpha$ द्विघात समीकरण का एक हल है** अथवा **α द्विघात समीकरण को संतुष्ट करता है।** ध्यान दीजिए कि **द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक और द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल एक ही हैं।**

आपने अध्याय 2 में, देखा है कि एक द्विघात बहुपद के अधिक से अधिक दो शून्यक हो सकते हैं। अतः, किसी द्विघात समीकरण के अधिक से अधिक दो मूल हो सकते हैं।

आपने कक्षा IX में सीखा है कि कैसे मध्य पद को विभक्त करके एक द्विघात बहुपद के गुणनखंड किए जा सकते हैं। हम इस ज्ञान का प्रयोग द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने में करेंगे। आइए देखें कैसे।

उदाहरण 3 : गुणनखंडन द्वारा समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल : सर्वप्रथम, हम मध्य पद $- 5x$ को $-2x -3x$ [क्योंकि $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$] के रूप में विभक्त करते हैं।

अतः, $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x (x - 1) -3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

इसलिए, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ को $(2x - 3)(x - 1) = 0$ के रूप में पुनः लिखा जा सकता है।

अतः, x के वे मान जिनके लिए $2x^2 - 5x + 3 = 0$ वही है, जो $(2x - 3)(x - 1) = 0$ से प्राप्त है, अर्थात् $2x - 3 = 0$ या $x - 1 = 0$ से प्राप्त होंगे।

अब, $2x - 3 = 0$, $x = \frac{3}{2}$ देता है और $x - 1 = 0$, $x = 1$ देता है।

अतः, $x = \frac{3}{2}$ और $x = 1$ दिए हुए समीकरण के हल हैं।

दूसरे शब्दों में, 1 और $\frac{3}{2}$ समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूल हैं।

जाँच कीजिए कि ये ही दिए गए समीकरण के मूल हैं।

ध्यान दीजिए कि हमने समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूलों को $2x^2 - 5x + 3$ के दो रैखिक गुणनखंडों में गुणनखंडित करके और प्रत्येक गुणनखंड को शून्य के बराबर करके प्राप्त किए हैं।

उदाहरण 4 : द्विघात समीकरण $6x^2 - x - 2 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल : हमें प्राप्त है:

$$\begin{aligned} 6x^2 - x - 2 &= 6x^2 + 3x - 4x - 2 \\ &= 3x (2x + 1) - 2 (2x + 1) \\ &= (3x - 2)(2x + 1) \end{aligned}$$

$6x^2 - x - 2 = 0$ के मूल x के वे मान हैं, जिनके लिए $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ हो।

इसलिए $3x - 2 = 0$ या $2x + 1 = 0$

अर्थात् $x = \frac{2}{3}$ या $x = -\frac{1}{2}$

अत: $6x^2 - x - 2 = 0$ के मूल $\frac{2}{3}$ और $-\frac{1}{2}$ हैं।

हम मूलों का सत्यापन के लिए यह जाँच करते हैं कि $\frac{2}{3}$ और $-\frac{1}{2}$ समीकरण $6x^2 - x - 2 = 0$ को संतुष्ट करते हैं या नहीं।

उदाहरण 5 : द्विघात समीकरण $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल :
$$3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$$
$$= \sqrt{3}x\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)$$
$$= \left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)$$

अत: समीकरण के मूल x के वे मान हैं, जिनके लिए

$$\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) = 0$$

अब $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ के लिए, $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ है।

अत: यह मूल, गुणनखंड $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ के दो बार आने के कारण, दो बार आता है, अर्थात् इस मूल की पुनरावृत्ति होती है।

इसलिए $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ के मूल $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ हैं।

उदाहरण 6 : अनुच्छेद 4.1 में दिए गए प्रार्थना कक्ष की विमाएँ (लंबाई और चौड़ाई) ज्ञात कीजिए।

हल : अनुच्छेद 4.1 में हमने ज्ञात किया था कि यदि कक्ष की चौड़ाई x m हो, तो x समीकरण $2x^2 + x - 300 = 0$ को संतुष्ट करता है। गुणनखंडन विधि का प्रयोग कर, हम इस समीकरण को निम्न प्रकार से लिखते हैं :

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

या $2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$

अर्थात् $(x - 12)(2x + 25) = 0$

अतः, दिए गए समीकरण के दो मूल $x = 12$ या $x = -12.5$ हैं। क्योंकि x कक्ष की चौड़ाई है, यह ऋणात्मक नहीं हो सकती।

इसलिए, कक्ष की चौड़ाई 12 m है। इसकी लंबाई $= 2x + 1 = 25$ m होगी।

प्रश्नावली 4.2

1. गुणनखंड विधि से निम्न द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए:

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}\,x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

2. उदाहरण 1 में दी गई समस्याओं को हल कीजिए।

3. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योग 27 हो और गुणनफल 182 हो।

4. दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 365 हो।

5. एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई इसके आधार से 7 cm कम है। यदि कर्ण 13 cm का हो, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

6. एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ बर्तनों का निर्माण करता है। एक विशेष दिन यह देखा गया कि प्रत्येक नग की निर्माण लागत (₹ में) उस दिन के निर्माण किए बर्तनों की संख्या के दुगुने से 3 अधिक थी। यदि उस दिन की कुल निर्माण लागत ₹ 90 थी, तो निर्मित बर्तनों की संख्या और प्रत्येक नग की लागत ज्ञात कीजिए।

4.4 द्विघात समीकरण का पूर्ण वर्ग बनाकर हल

पिछले अनुच्छेद में, आपने एक द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने की एक विधि पढ़ी थी। इस अनुच्छेद में, हम एक और विधि पढ़ेंगे।

निम्न स्थिति पर विचार कीजिए:

सुनीता की दो वर्ष पूर्व आयु (वर्षों में) तथा अब से चार वर्ष उपरांत की आयु का गुणनफल उसकी वर्तमान आयु के दो गुने से एक अधिक है। उसकी वर्तमान आयु क्या है?

इसका उत्तर देने के लिए, माना उसकी वर्तमान आयु (वर्षों में) x है। तब, उसकी 2 वर्ष पूर्व आयु एवं अब से चार वर्ष उपरांत की आयु का गुणनफल $(x-2)(x+4)$ है।

इसलिए $(x-2)(x+4) = 2x + 1$

अर्थात् $x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

अर्थात् $x^2 - 9 = 0$

अत: सुनीता की वर्तमान आयु द्विघात समीकरण $x^2 - 9 = 0$ को संतुष्ट करती है।

हम इसे $x^2 = 9$ के रूप में लिख सकते हैं। वर्गमूल लेने पर, हम $x = 3$ या $x = -3$ पाते हैं। क्योंकि आयु एक धनात्मक संख्या होती है, इसलिए $x = 3$ ही होगा।

अत: सुनीता की वर्तमान आयु 3 वर्ष है।

अब द्विघात समीकरण $(x + 2)^2 - 9 = 0$ पर विचार कीजिए। हल करने के लिए, इसे हम $(x + 2)^2 = 9$ के रूप में लिख सकते हैं। वर्गमूल लेने पर, हम $x + 2 = 3$ या $x + 2 = -3$ पाते हैं।

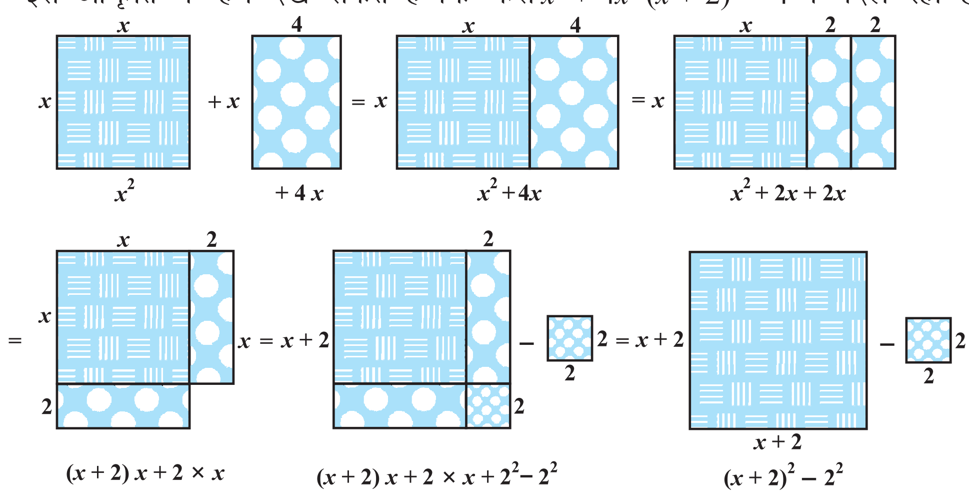
इसलिए $\quad x = 1 \quad$ या $\quad x = -5$

अत: $(x + 2)^2 - 9 = 0$ के मूल 1 और – 5 हैं।

उपर्युक्त दोनों उदाहरणों में, x को समाहित करने वाला पद पूर्णतया वर्ग के अंदर है और हमने वर्गमूल लेकर आसानी से मूल ज्ञात कर लिए थे। परंतु यदि हमें समीकरण $x^2 + 4x - 5 = 0$ को हल करने को कहा जाता, तो क्या होता? हम संभवत: इसे करने के लिए गुणनखंड विधि का प्रयोग करते, जब तक कि हम यह न जान लें (किसी प्रकार) कि $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 9$ है।

अत: $x^2 + 4x - 5 = 0$ को हल करना $(x + 2)^2 - 9 = 0$ को हल करने के तुल्य है, जो हमने देखा कि बहुत शीघ्र ही हल हो जाता है। वास्तव में, हम किसी भी द्विघात समीकरण को $(x + a)^2 - b^2 = 0$ की तरह बना सकते हैं और फिर हम इसके मूल आसानी से प्राप्त कर सकते हैं। आइए देखें कि क्या यह संभव है। आकृति 4.2 देखिए।

इस आकृति में हम देख सकते हैं कि कैसे $x^2 + 4x$ $(x + 2)^2 - 4$ में बदल रहा है।



आकृति 4.2

प्रक्रिया निम्न प्रकार से है:

$$x^2 + 4x = (x^2 + \frac{4}{2}x) + \frac{4}{2}x$$
$$= x^2 + 2x + 2x$$
$$= (x + 2)\,x + 2 \times x$$
$$= (x + 2)\,x + 2 \times x + 2 \times 2 - 2 \times 2$$
$$= (x + 2)\,x + (x + 2) \times 2 - 2 \times 2$$
$$= (x + 2)\,(x + 2) - 2^2$$
$$= (x + 2)^2 - 4$$

अत: $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 4 - 5 = (x + 2)^2 - 9$

इस प्रकार, $x^2 + 4x - 5 = 0$ को पूर्ण वर्ग बनाकर $(x + 2)^2 - 9 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसे **पूर्ण वर्ग बनाने की विधि** से जाना जाता है।

संक्षेप में, इसे निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है:

$$x^2 + 4x = \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

अत: $x^2 + 4x - 5 = 0$ को पुन: निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$\left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - 4 - 5 = 0$$

अर्थात् $(x + 2)^2 - 9 = 0$

अब समीकरण $3x^2 - 5x + 2 = 0$ पर विचार कीजिए। ध्यान दीजिए कि x^2 का गुणांक पूर्ण वर्ग नहीं है। इसलिए, हम समीकरण को 3 से गुणा करके पाते हैं:

$$9x^2 - 15x + 6 = 0$$

अब $9x^2 - 15x + 6 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + 6$

$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

अतः $9x^2 - 15x + 6 = 0$ को निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

अर्थात् $$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

अतः $9x^2 - 15x + 6 = 0$ के वही हल हैं, जो $\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ के हैं।

अर्थात् $$3x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \text{ या } 3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

(हम इसे $3x - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$, जहाँ '$\pm$' धन और ऋण को निरूपित करते हैं, भी लिख सकते हैं।)

अतः $$3x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \text{ या } 3x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

अतः $$x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \text{ या } x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$$

इसलिए $$x = 1 \text{ या } x = \frac{4}{6}$$

अर्थात् $$x = 1 \text{ या } x = \frac{2}{3}$$

इसलिए दिए गए समीकरण के मूल 1 और $\frac{2}{3}$ हैं।

टिप्पणी : इसको दर्शाने की एक दूसरी विधि निम्न है :

समीकरण $$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

वही है जो $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$ है।

अब $$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3}$$

$$= \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36}$$

$$= \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} = \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

इसलिए $3x^2 - 5x + 2 = 0$ का वही हल है, जो $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$ का हल है।

अर्थात् $x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$, अर्थात् $x = \frac{5}{6}+\frac{1}{6} = 1$ और $x = \frac{5}{6}-\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ है।

उपर्युक्त विधि को समझाने के लिए आइए कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 7 : उदाहरण 3 में दिया गया समीकरण पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से हल कीजिए।

हल : समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ वही है, जो $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ है।

अब $$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

इसलिए $2x^2 - 5x + 3 = 0$ को $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ की तरह लिखा जा सकता है।

अत: समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूल वस्तुत: वही हैं, जो $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ के मूल हैं।

अब $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ वही है, जो $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ है।

इसलिए $$x - \frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4}$$

अर्थात् $$x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}$$

अर्थात् $$x = \frac{5}{4}+\frac{1}{4} \text{ या } x = \frac{5}{4}-\frac{1}{4}$$

अर्थात् $$x = \frac{3}{2} \text{ या } x = 1$$

इसलिए समीकरण के हल $x = \frac{3}{2}$ और 1 हैं।

आइए इन हलों की **जाँच** करें।

$2x^2 - 5x + 3 = 0$ में $x = \frac{3}{2}$ रखने पर, हम $2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 0$ पाते हैं, जो सही है। इसी प्रकार, आप जाँच कर सकते हैं कि $x = 1$ भी दिए गए समीकरण को संतुष्ट करता है।

उदाहरण 7 में, हमने समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ को 2 से भाग देकर $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ प्राप्त किया जिससे प्रथम पद पूर्ण वर्ग बन गया और फिर वर्ग को पूरा किया। इसके स्थानपर, हम समस्त पदों को 2 से गुणा करके भी प्रथम पद को $4x^2 = (2x)^2$ बना सकते थे और तब पूर्ण वर्ग बना लेते।

इस विधि को अगले उदाहरण में समझाया गया है।

उदाहरण 8 : पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से समीकरण $5x^2 - 6x - 2 = 0$ के मूल हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण को 5 से गुणा करने पर, हम पाते हैं:

$$25x^2 - 30x - 10 = 0$$

यह निम्न के तुल्य है:

$$(5x)^2 - 2 \times (5x) \times 3 + 3^2 - 3^2 - 10 = 0$$

अर्थात् $$(5x - 3)^2 - 9 - 10 = 0$$

अर्थात् $$(5x - 3)^2 - 19 = 0$$

अर्थात् $$(5x - 3)^2 = 19$$

अर्थात् $$5x - 3 = \pm\sqrt{19}$$

अर्थात् $$5x = 3 \pm \sqrt{19}$$

अत: $$x = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$$

इसलिए मूल $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ और $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$ हैं।

सत्यापित कीजिए कि मूल $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ और $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$ हैं।

उदाहरण 9 : पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से $4x^2 + 3x + 5 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल : ध्यान दीजिए $4x^2 + 3x + 5 = 0$ निम्न के तुल्य है:

$$(2x)^2 + 2 \times (2x) \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = 0$$

अर्थात् $$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 5 = 0$$

अर्थात् $$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{71}{16} = 0$$

अर्थात् $$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{-71}{6} < 0 \text{ है}$$

परंतु हम जानते हैं कि किसी भी x के वास्तविक मान के लिए $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2$ ऋणात्मक नहीं हो सकता है (क्यों?)। इसलिए, x का कोई वास्तविक मान दी हुई समीकरण को संतुष्ट नहीं कर सकता। अतः, दिए गए समीकरण के कोई वास्तविक मूल नहीं हैं।

अब तक आपने पूर्ण वर्ग बनाने की विधि वाले अनेक उदाहरण देखे हैं। अतः, आइए इस विधि को व्यापक रूप में दें।

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ पर विचार कीजिए। समस्त पदों को a से भाग देने पर, हम पाते हैं: $$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

इस समीकरण को हम इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

अर्थात् $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

इसलिए दिए गए समीकरण के मूल वही हैं, जो

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0, \text{ अर्थात् } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad (1)$$

के हैं। यदि $b^2 - 4ac \geq 0$ हो, तो (1) का वर्गमूल लेने पर, हम पाते हैं:

$$x+\frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

इसलिए
$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

अत:, $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ और $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ हैं, यदि $b^2 - 4ac \geq 0$ है। उस स्थिति में जब $b^2 - 4ac < 0$ है, तो समीकरण के वास्तविक मूल नहीं होते हैं। (क्यों?)

अत:, यदि $b^2 - 4ac \geq 0$ है, तो द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ हैं।

द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने के इस सूत्र को **द्विघाती सूत्र (quadratic formula)** कहते हैं।

द्विघाती सूत्र के उपयोग के लिए आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 10 : प्रश्नावली 4.1 के प्रश्न संख्या 2(i) को द्विघाती सूत्र से हल कीजिए।

हल : माना भूखंड की चौड़ाई x मीटर है। तब, लंबाई $(2x + 1)$ मीटर है। हमें दिया है कि $x(2x + 1) = 528$, अर्थात् $2x^2 + x - 528 = 0$ है।

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का समीकरण है, जहाँ $a = 2, b = 1, c = -528$ है।

अत: द्विघाती सूत्र से, हमें निम्न हल मिलते हैं:

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1+4(2)(528)}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{4225}}{4}=\frac{-1\pm 65}{4}$$

अर्थात्
$$x = \frac{64}{4} \quad \text{या} \quad x=\frac{-66}{4}$$

अर्थात्
$$x = 16 \quad \text{या} \quad x=-\frac{33}{2}$$

क्योंकि x एक विमा (चौड़ाई) होने के कारण ऋणात्मक नहीं हो सकता है, इसलिए भूखंड की चौड़ाई 16m है और लंबाई 33m है।

आपको यह सत्यापित करना चाहिए कि ये मान समस्या के प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं।

उदाहरण 11 : दो ऐसे क्रमागत विषम धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 290 हों।

हल : माना दोनों क्रमागत विषम धनात्मक पूर्णांकों में छोटा पूर्णांक x है। तब, दूसरा पूर्णांक $x + 2$ होगा। प्रश्न के अनुसार,

$$x^2 + (x + 2)^2 = 290$$

अर्थात् $$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

अर्थात् $$2x^2 + 4x - 286 = 0$$

अर्थात् $$x^2 + 2x - 143 = 0,$$

जो x में एक द्विघात समीकरण है।

द्विघाती सूत्र का प्रयोग करके, हम पाते हैं:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

अर्थात् $$x = 11 \quad \text{या} \quad x = -13$$

परन्तु x एक धनात्मक विषम पूर्णांक दिया है। अत:, $x = 11$ होगा, क्योंकि $x \neq -13$ है।

अत:, दोनों क्रमागत विषम धनात्मक पूर्णांक 11 और 13 हैं।

जाँच : $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$ है।

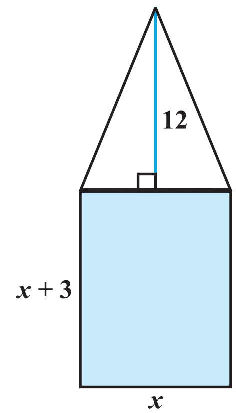
उदाहरण 12 : एक ऐसे आयताकार पार्क को बनाना है जिसकी चौड़ाई इसकी लंबाई से 3 m कम हो। इसका क्षेत्रफल पहले से निर्मित समद्विबाहु त्रिभुजाकार पार्क जिसका आधार आयताकार पार्क की चौड़ाई के बराबर तथा ऊँचाई 12 m है, से 4 वर्ग मीटर अधिक हो (देखिए आकृति 4.3)। इस आयताकार पार्क की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि आयताकार पार्क की चौड़ाई x m है।

इसलिए, इसकी लंबाई = $(x + 3)$ m होगी।

अत: आयताकार पार्क का क्षेत्रफल = $x(x + 3)\ m^2 = (x^2 + 3x)\ m^2$

अब समद्विबाहु त्रिभुज का आधार = x m



आकृति 4.3

अतः इसका क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x \text{ m}^2$

प्रश्न के अनुसार

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

अर्थात्
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

द्विघाती सूत्र का उपयोग करने पर, हम पाते हैं:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ या } -1$$

परंतु $x \neq -1$ है (क्यों?)। अतः, $x = 4$ है।

इसलिए, पार्क की चौड़ाई = 4m और लंबाई 7m होगी।

सत्यापन : आयताकार पार्क का क्षेत्रफल = 28 m^2

त्रिभुजाकार पार्क का क्षेत्रफल = $24 \text{ m}^2 = (28 - 4) \text{ m}^2$

उदाहरण 13 : निम्न द्विघात समीकरणों के मूल, यदि उनका अस्तित्व हो तो द्विघाती सूत्र का उपयोग करके ज्ञात कीजिए:

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

हल :

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ के लिए: यहाँ $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$ है। इसलिए, $b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$ है।

अतः $x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$ है, अर्थात् $x = 1$ या $x = \frac{2}{3}$ है।

इसलिए मूल $\frac{2}{3}$ और 1 हैं।

(ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ के लिए यहाँ $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$ है। इसलिए $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$ है।

परंतु, क्योंकि किसी वास्तविक संख्या का वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता है, इसलिए $\sqrt{b^2 - 4ac}$ का मान वास्तविक नहीं होगा।

अतः दिए हुए समीकरण के कोई वास्तविक मूल नहीं हैं।

(iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ के लिए: यहाँ $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1$ है।

इसलिए $b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$ है।

अत: $x = \dfrac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm 0$ है, अर्थात् $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ है।

इसलिए मूल $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ हैं।

उदाहरण 14 : निम्न समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए :

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

हल :

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3$ के लिए: सभी पदों को $x \neq 0$ से गुणा करने पर, हम पाते हैं:

$$x^2 + 1 = 3x$$

अर्थात् $x^2 - 3x + 1 = 0$, जो एक द्विघात समीकरण है।

यहाँ $a = 1, b = -3, c = 1$ है।

अत: $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

अत: $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (क्यों?)

इसलिए मूल $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ और $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ हैं।

(ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$:

चूँकि $x \neq 0, 2$ है, इसलिए समीकरण को $x(x-2)$ से गुणा करने पर, हम पाते हैं:

$$(x - 2) - x = 3x(x - 2)$$
$$= 3x^2 - 6x$$

अत:, दी गई समीकरण परिवर्तित होकर $3x^2 - 6x + 2 = 0$ बन जाती है, जो एक द्विघात समीकरण है।

यहाँ $a = 3, b = -6, c = 2$ है। इसलिए $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$ है।

अत:
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

इसलिए, मूल $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ और $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ हैं।

उदाहरण 15 : एक मोटर बोट, जिसकी स्थिर जल में चाल 18 km/h है, 24 km धारा के प्रतिकूल जाने में, वही दूरी धारा के अनुकूल जाने की अपेक्षा 1 घंटा अधिक लेती है। धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि धारा की चाल x km/h है।

इसलिए, धारा के प्रतिकूल नाव की चाल = $(18 - x)$ km/h और धारा के अनुकूल नाव की चाल = $(18 + x)$ km/h है।

धारा के प्रतिकूल जाने में लिया गया समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{24}{18-x}$ घंटे

इसी प्रकार, धारा के अनुकूल जाने में लिया गया समय = $\frac{24}{18+x}$ घंटे

प्रश्नानुसार

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

अर्थात् $24(18 + x) - 24(18 - x) = (18 - x)(18 + x)$

अर्थात् $x^2 + 48x - 324 = 0$

द्विघाती सूत्र का उपयोग करके, हम पाते हैं:

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

$$= \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ या } -54$$

क्योंकि x धारा की चाल है, इसलिए यह ऋणात्मक नहीं हो सकती है। अत:, हम मूल $x = -54$ को छोड़ देते हैं। इसलिए, $x = 6$ से हम प्राप्त करते हैं कि धारा की चाल 6 km/h है।

प्रश्नावली 4.3

1. यदि निम्नलिखित द्विघात समकरणों के मूलों का अस्तित्व हो तो इन्हें पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

(iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ (iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

2. उपर्युक्त प्रश्न 1 में दिए गए द्विघात समीकरणों के मूल, द्विघाती सूत्र का उपयोग करके, ज्ञात कीजिए।

3. निम्न समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए :

(i) $x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, x \neq -4, 7$

4. 3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु (वर्षों में) का व्युत्क्रम और अब से 5 वर्ष पश्चात् आयु के व्युत्क्रम का योग $\frac{1}{3}$ है। उसकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

5. एक क्लास टेस्ट में शेफाली के गणित और अंग्रेजी में प्राप्त किए गए अंकों का योग 30 है। यदि उसको गणित में 2 अंक अधिक और अंग्रेजी में 3 अंक कम मिले होते, तो उनके अंकों का गुणनफल 210 होता। उसके द्वारा दोनों विषयों में प्राप्त किए अंक ज्ञात कीजिए।

6. एक आयताकार खेत का विकर्ण उसकी छोटी भुजा से 60 मी अधिक लंबा है। यदि बड़ी भुजा छोटी भुजा से 30 मी अधिक हो, तो खेत की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

7. दो संख्याओं के वर्गों का अंतर 180 है। छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का आठ गुना है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

8. एक रेलगाड़ी एक समान चाल से 360 km की दूरी तय करती है। यदि यह चाल 5 km/h अधिक होती, तो वह उसी यात्रा में 1 घंटा कम समय लेती। रेलगाड़ी की चाल ज्ञात कीजिए।

9. दो पानी के नल एक-साथ एक हौज को $9\frac{3}{8}$ घंटों में भर सकते हैं। बड़े व्यास वाला नल हौज को भरने में, कम व्यास वाले नल से 10 घंटे कम समय लेता है। प्रत्येक नल द्वारा अलग से हौज को भरने के समय ज्ञात कीजिए।

10. मैसूर और बैगंलोर के बीच के 132 km यात्रा करने में एक एक्सप्रेस रेलगाड़ी, सवारी गाड़ी से 1 घंटा समय कम लेती है (मध्य के स्टेशनों पर ठहरने का समय ध्यान में न लिया जाए)। यदि एक्सप्रेस रेलगाड़ी की औसत चाल, सवारी गाड़ी की औसत चाल से 11km/h अधिक हो, तो दोनों रेलगाड़ियों की औसत चाल ज्ञात कीजिए।

11. दो वर्गों के क्षेत्रफलों का योग 468 m^2 है। यदि उनके परिमापों का अंतर 24 m हो, तो दोनों वर्गों की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

4.5 मूलों की प्रकृति

पिछले अनुच्छेद में, आपने देखा है कि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

द्वारा देय होते हैं। यदि $b^2 - 4ac > 0$ है, तो हम दो भिन्न वास्तविक मूल $-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ और $-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ प्राप्त करते हैं।

यदि $b^2 - 4ac = 0$ है तो $x = -\frac{b}{2a} \pm 0$, अर्थात् $x = -\frac{b}{2a}$ या $-\frac{b}{2a}$ है।

अतः, समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दोनों मूल $\frac{-b}{2a}$ हैं।

इसलिए, हम कहते हैं कि इस स्थिति में द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दो बराबर वास्तविक मूल हैं।

यदि $b^2 - 4ac < 0$ है, तो ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं है, जिसका वर्ग $b^2 - 4ac$ हो। अतः दिए हुए द्विघात समीकरण के इस स्थिति में कोई वास्तविक मूल नहीं हैं।

क्योंकि $b^2 - 4ac$ यह निश्चित करता है कि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल वास्तविक हैं अथवा नहीं, इसलिए $b^2 - 4ac$ को इस द्विघात समीकरण का **विविक्तकर (Discriminant)** कहते हैं।

अतः, द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के

(i) दो भिन्न वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac > 0$ हो

(ii) दो बराबर वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac = 0$ हो

(iii) कोई वास्तविक मूल नहीं होता, यदि $b^2 - 4ac < 0$ हो

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 16 : द्विघात समीकरण $2x^2 - 4x + 3 = 0$ का विविक्तकर ज्ञात कीजिए और फिर मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का है, जहाँ $a = 2$, $b = -4$ और $c = 3$ है। इसलिए, विविक्तकार

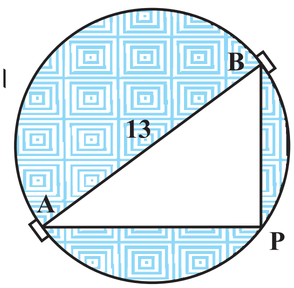
$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0 \text{ है।}$$

अतः, दिए गए समीकरण के कोई वास्तविक मूल नहीं हैं।

उदाहरण 17 : 13 मीटर व्यास वाले एक वृत्ताकार पार्क की परिसीमा के एक बिंदु पर एक खंभा इस प्रकार गाड़ना है कि इस पार्क के एक व्यास के दोनों अंत बिंदुओं पर बने फाटकों A और B से खंभे की दूरियों का अंतर 7 मीटर हो। क्या ऐसा करना संभव है? यदि है, तो दोनों फाटकों से कितनी दूरियों पर खंभा गाड़ना है?

हल : आइए सर्वप्रथम एक चित्र बनाएँ (देखिए आकृति 4.4)।

माना खंभे की अभीष्ट स्थिति P है। माना खंभे की फाटक B से दूरी x m है अर्थात् BP = x m है। अब खंभे की दोनों फाटकों की दूरियों का अंतर = AP – BP (या BP – AP) = 7 m है। इसलिए, AP = $(x + 7)$ m होगा।



आकृति 4.4

साथ ही, AB = 13m है। चूँकि AB व्यास है, इसलिए

$$\angle APB = 90^\circ \quad \text{(क्यों?)}$$

इसलिए $AP^2 + PB^2 = AB^2$ (पाइथागोरस प्रमेय द्वारा)

अर्थात् $(x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

अर्थात् $x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

अर्थात् $2x^2 + 14x - 120 = 0$

अत: खंभे की फाटक B से दूरी 'x' समीकरण $x^2 + 7x - 60 = 0$ को संतुष्ट करती है।

यह देखने के लिए कि ऐसा संभव है अथवा नहीं, आइए इसके विविक्तकर पर विचार करें। विविक्तकर है:

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$$

अत:, दिए गए द्विघात समीकरण के दो वास्तविक मूल हैं और इसीलिए खंभे को पार्क की परिसीमा पर गाड़ा जा सकना संभव है।

द्विघात समीकरण $x^2 + 7x - 60 = 0$ को द्विघाती सूत्र से हल करने पर, हम पाते हैं:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

इसलिए, $x = 5$ या -12 है।

चूँकि x खंभे और फाटक B के बीच की दूरी है, यह धनात्मक होना चाहिए। इसलिए, $x = -12$ को छोड़ देते हैं। अत:, $x = 5$ है।

इस प्रकार, खंभे को पार्क की परिसीमा पर फाटक B से 5m और फाटक A से $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$m की दूरी पर गाड़ना है।

उदाहरण 18 : समीकरण $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ का विविक्तकार ज्ञात कीजिए और फिर मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि वे वास्तविक है, तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 3, b = -2, c = \frac{1}{3}$ है।

इसलिए विविक्तकर $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$ है।

अतः द्विघात समीकरण के दो बराबर वास्तविक मूल हैं।

ये मूल $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$, अर्थात् $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$, अर्थात् $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ हैं।

प्रश्नावली 4.4

1. निम्न द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए :

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 4 = 0$

   (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. निम्न प्रत्येक द्विघात समीकरण में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हों।

   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x-2) + 6 = 0$

3. क्या एक ऐसी आम की बगिया बनाना संभव है जिसकी लंबाई, चौड़ाई से दुगुनी हो और उसका क्षेत्रफल 800 m^2 हो? यदि है, तो उसकी लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

4. क्या निम्न स्थिति संभव है? यदि है तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
   दो मित्रों की आयु का योग 20 वर्ष है। चार वर्ष पूर्व उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल 48 था।

5. क्या परिमाप 80 m तथा क्षेत्रफल 400 m^2 के एक पार्क को बनाना संभव है? यदि है, तो उसकी लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

4.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. चर x में एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का होता है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है।

2. एक वास्तविक संख्या α द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल कहलाती है, यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ हो। द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक और द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल एक ही होते हैं।

3. यदि हम $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ के दो रैखिक गुणकों में गुणनखंड कर सकें, तो द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल, प्रत्येक गुणक को शून्य के बराबर करके, प्राप्त कर सकते हैं।
4. पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से भी दिए गए द्विघात समीकरण को हल किया जा सकता है।
5. द्विघाती सूत्र: द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ द्वारा देय होते हैं, यदि $b^2 - 4ac \geq 0$ हो।
6. एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ में,
   (i) दो भिन्न वास्तविक मूल होते हैं, यदि $b^2 - 4ac > 0$ हो।
   (ii) दो बराबर मूल (अर्थात् संपाती वास्तविक मूल) होते हैं, यदि $b^2 - 4ac = 0$ हो और
   (iii) कोई वास्तविक मूल नहीं होते हैं, यदि $b^2 - 4ac < 0$ हो।

पाठकों के लिए विशेष

शाब्दिक समस्याओं की स्थिति में, प्राप्त हलों की जाँच समस्या के अंतर्गत बनी समीकरणों से नहीं, अपितु मूल समस्या मे दिए गए प्रतिबंधों द्वारा की जानी चाहिए (अध्याय 3 के उदाहरणों 11, 13, 19 तथा अध्याय 4 के उदाहरणों 10, 11, 12 को देखिए)।

1063CH05

समांतर श्रेढ़ियाँ (Arithmatic Progressions) 5

5.1 भूमिका

आपने इस पर अवश्य ध्यान दिया होगा कि प्रकृति में, अनेक वस्तुएँ एक निश्चित प्रतिरूप (pattern) का अनुसरण करती हैं, जैसे कि सूरजमुखी के फूल की पंखुड़ियाँ, मधु-कोष (या मधु-छत्ते) में छिद्र, एक भुट्टे पर दाने, एक अनन्नास और एक पाइन कोन (pine cone) पर सर्पिल (Spirals), इत्यादि

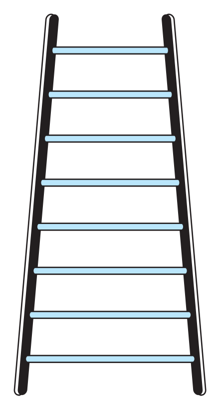
अब हम अपने दैनिक जीवन में आने वाले प्रतिरूपों की ओर देखते हैं। ऐसे कुछ उदाहरण हैं :

(i) रीना ने एक पद के लिए आवेदन किया और उसका चयन हो गया। उसे यह पद ₹ 8000 के मासिक वेतन और ₹ 500 वार्षिक की वेतन वृद्धि के साथ दिया गया। उसका वेतन (₹ में) पहले वर्ष, दूसरे वर्ष, तीसरे वर्ष, इत्यादि के लिए क्रमशः

8000, 8500, 9000, . . . होगा।

(ii) एक सीढ़ी के डंडों की लंबाइयाँ नीचे से ऊपर की ओर एक समान रूप से 2 cm घटती जाती हैं। (देखिए आकृति 5.1)। सबसे नीचे वाला डंडा लंबाई में 45 cm है। नीचे से, पहले, दूसरे, तीसरे, . . . डंडों की लंबाइयाँ (cm में) क्रमशः

45, 43, 41, 39, 37, 35, 33 और 31 हैं।



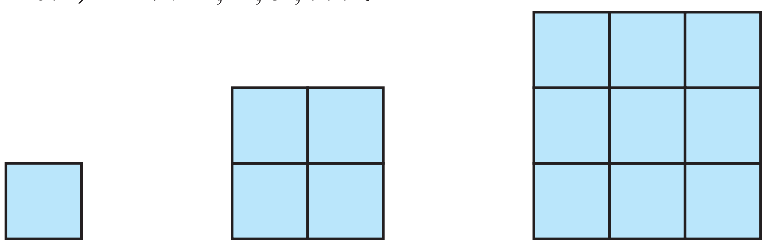
आकृति 5.1

(iii) किसी बचत योजना में, कोई धनराशि प्रत्येक 3 वर्षों के बाद स्वयं की $\frac{5}{4}$ गुनी हो जाती

है। 8000 रु के निवेश की 3, 6, 9 और 12 वर्षों के बाद परिपक्वता राशियाँ (रुपयों में) क्रमशः

10000, 12500, 15625, और 19531.25 हैं।

(iv) भुजाओं 1, 2, 3, . . . मात्रकों (units) वाले वर्गों में मात्रक वर्गों की संख्याएँ (देखिए आकृति 5.2) क्रमशः $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ हैं।

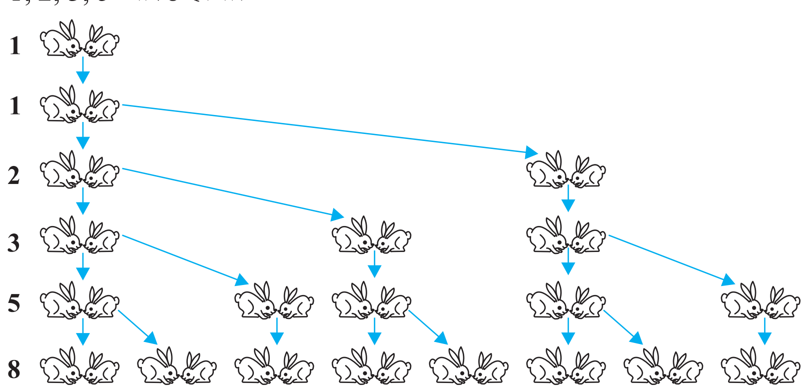


आकृति 5.2

(v) शकीला अपनी पुत्री की गुल्लक में ₹ 100 तब डालती है, जब वह एक वर्ष की हो जाती है तथा प्रत्येक वर्ष इसमें ₹ 50 की वृद्धि करती जाती है। उसके पहले, दूसरे, तीसरे, चौथे, ... जन्म दिवसों पर उसकी गुल्लक में डाली गई राशियाँ (रुपयों में) क्रमशः

100, 150, 200, 250, . . . होंगी।

(vi) खरगोशों का एक युग्म अपने पहले महीने में प्रजनन करने के योग्य नहीं है। दूसरे और प्रत्येक आने वाले महीने में वे एक नए युग्म का प्रजनन करते हैं। प्रत्येक नया युग्म अपने दूसरे महीने और प्रत्येक आने वाले महीने में एक नए युग्म का प्रजनन करता है (देखिए आकृति 5.3)। यह मानते हुए कि किसी खरगोश की मृत्यु नहीं होती है, पहले, दूसरे, तीसरे, . . ., छठे महीने के प्रारंभ में खरगोशों के युग्मों की संख्या क्रमशः 1, 1, 2, 3, 5 और 8 होगी।



आकृति 5.3

उपरोक्त उदाहरणों में, हम कुछ प्रतिरूप देखते हैं। कुछ में, हम देखते हैं कि उत्तरोत्तर पद अपने से पहले पद में एक स्थिर संख्या जोड़ने से प्राप्त होते हैं; कुछ में ये पद अपने से पहले पद को एक निश्चित संख्या से गुणा करके प्राप्त होते हैं तथा कुछ अन्य में हम यह देखते हैं कि ये क्रमागत संख्याओं के वर्ग हैं, इत्यादि।

इस अध्याय में, हम इनमें से एक प्रतिरूप का अध्ययन करेंगे जिसमें उत्तरोत्तर पद अपने से पहले पदों में एक निश्चित संख्या जोड़ने पर प्राप्त किए जाते हैं। हम यह भी देखेंगे कि इनके nवें पद और n क्रमागत पदों के योग किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं तथा इस ज्ञान का प्रयोग कुछ दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने में करेंगे।

5.2 समांतर श्रेढ़ियाँ

संख्याओं की निम्नलिखित सूचियों (lists) पर विचार कीजिए:

(i) 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) –3, –2, –1, 0, . . .

(iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

सूची की प्रत्येक संख्या एक **पद (term)** कहलाता है।

उपरोक्त सूचियों में से प्रत्येक सूची में, यदि आपको एक पद दिया हो, तो क्या आप उसका अगला पद लिख सकते हैं? यदि हाँ, तो आप ऐसा कैसे करेंगे? शायद, किसी प्रतिरूप या नियम का अनुसरण करते हुए, आप ऐसा करेंगे। आइए, उपरोक्त सूचियों को देखें और इनमें संबद्ध नियम को लिखें।

(i) में प्रत्येक पद अपने पिछले पद से 1 अधिक है।

(ii) में प्रत्येक पद अपने पिछले पद से 30 कम है।

(iii) में प्रत्येक पद अपने पिछले पद में 1 जोड़ने से प्राप्त होता है।

(iv) में सभी पद 3 हैं, अर्थात् प्रत्येक पद अपने पिछले पद में शून्य जोड़कर (या उसमें से शून्य घटा कर 0 प्राप्त होता है।)

(v) में प्रत्येक पद अपने पिछले पद में – 0.5 जोड़कर (अर्थात् उसमें से 0.5 घटाकर) प्राप्त होता है।

उपरोक्त सूचियों में से प्रत्येक में हम देखते हैं कि उत्तरोत्तर पदों को इनसे पहले पदों

में एक निश्चित संख्या जोड़कर प्राप्त किया जाता है। संख्याओं की ऐसी सूची को यह कहा जाता है कि वे एक **समांतर श्रेढ़ी (Arithmetic Progression या A.P.)** बना रहे हैं।

अतः, **एक समांतर श्रेढ़ी संख्याओं की एक ऐसी सूची है जिसमें प्रत्येक पद (पहले पद के अतिरिक्त) अपने पद में एक निश्चित संख्या जोड़ने पर प्राप्त होता है।**

यह निश्चित संख्या A.P. का **सार्व अंतर (common difference)** कहलाती है। याद रखिए, यह सार्व अंतर **धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य** हो सकता है।

आइए एक A.P. के पहले पद को a_1 दूसरे पद को $a_2, \ldots, n$वें पद को a_n तथा सार्व अंतर को d से व्यक्त करें। तब, A.P., $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ हो जाती है।

अतः $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$ है।

A.P. के कुछ अन्य उदाहरण निम्नलिखित हैं :

(a) किसी स्कूल की प्रातःकालीन सभा में एक पंक्ति में खड़े हुए कुछ विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ (cm में) 147 , 148, 149, . . ., 157 हैं।

(b) किसी शहर में, जनवरी मास में किसी सप्ताह में लिए गए न्यूनतम तापमान (डिग्री सेल्सियस में) आरोही क्रम में लिखने पर

$$-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5 \text{ हैं।}$$

(c) ₹ 1000 के एक ऋण में से प्रत्येक मास 5% ऋण की राशि वापिस करने पर शेष राशियाँ (₹ में) 950, 900, 850, 800, . . ., 50 हैं।

(d) किसी स्कूल द्वारा कक्षाओं I से XII तक के सर्वाधिक अंक पाने वाले विद्यार्थियों को दिए जाने वाले नकद पुरस्कार (₹ में) क्रमशः 200, 250, 300, 350, . . ., 750 हैं।

(e) जब प्रति मास ₹ 50 की बचत की जाती है, तो 10 मास के लिए, प्रत्येक मास के अंत में कुल बचत की राशियाँ (₹ में) 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450 और 500 हैं।

यह आपके अभ्यास के लिए छोड़ा जा रहा है कि आप स्पष्ट करें कि उपरोक्त में प्रत्येक सूची एक A.P. क्यों है।

आप यह देख सकते हैं कि

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

एक समांतर श्रेढ़ी को निरूपित करती है, जहाँ a पहला पद है और d सार्व अंतर है। **इसे A.P. का व्यापक रूप (general form)** कहते हैं।

ध्यान दीजिए कि उपरोक्त उदाहरणों (a) से (e) में, पदों की संख्या परिमित (finite) है। ऐसी A.P. को एक **परिमित A.P.** कहते हैं। आप यह भी देख सकते हैं कि इनमें से प्रत्येक A.P. का एक **अंतिम पद (last term)** है। इसी अनुच्छेद के उदाहरणों (i) से (v) में दी हुई A.P. परिमित A.P. नहीं हैं। ये **अपरिमित A.P. (Infinite Arithmetic Progressions)** कहलाती है। ऐसी A.P. में अंतिम पद नहीं होते।

अब एक A.P. के बारे में जानने के लिए आपको न्यूनतम किस सूचना की आवश्यकता होती है? क्या इसके प्रथम पद की जानकारी पर्याप्त है? या क्या इसके केवल सार्व अंतर की जानकारी पर्याप्त है? आप पाएँगे कि आपको इन दोनों अर्थात् प्रथम पद a और सार्व अंतर d की जानकारी होना आवश्यक है।

उदाहरणार्थ, यदि प्रथम पद $a = 6$ है और सार्व अंतर $d = 3$ है तो

6, 9,12, 15, . . . A.P. है।

तथा यदि $a = 6$ है और $d = -3$ है तो

6, 3, 0, –3, . . . A.P. है।

इसी प्रकार, जब

$a = -7$, $d = -2$, तो – 7, – 9, – 11, – 13, . . . A.P. है।

$a = 1.0$, $d = 0.1$, तो 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, . . . A.P. है।

$a = 0$, $d = 1\frac{1}{2}$, तो 0, $1\frac{1}{2}$, 3, $4\frac{1}{2}$, 6, . . . A.P. है।

$a = 2$, $d = 0$, तो 2, 2, 2, 2, . . . A.P. है।

अतः यदि आपको a और d ज्ञात हों तो A.P. लिख सकते हैं। इसकी विपरीत प्रक्रिया के बारे में आप क्या कह सकते हैं? अर्थात् यदि आपको संख्याओं की एक सूची दी हुई है, तो क्या आप कह सकते हैं कि यह एक A.P. है और फिर इसके a और d ज्ञात कर सकते हैं? क्योंकि a प्रथम पद है, इसलिए इसे सरलता से लिखा जा सकता है। हम जानते हैं कि एक A.P. में, प्रत्येक उत्तरोत्तर पद अपने से पहले पद में d जोड़कर प्राप्त होता है। अतः, एक A.P. के लिए, उसके प्रत्येक पद को उससे अगले पद में से घटाने से प्राप्त d सभी पदों के लिए एक ही होगा। उदाहरणार्थ, संख्याओं की सूची

6, 9, 12, 15, . . .

के लिए हमें प्राप्त है: $a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3$

$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3$

$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$

यहाँ, प्रत्येक स्थिति में, किन्हीं दो क्रमागत पदों का अंतर 3 है। अतः, संख्याओं की उपरोक्त दी हुई चर्चा सूची एक A.P. है, जिसका प्रथम पद $a = 6$ है तथा सार्व अंतर $d = 3$ है।

संख्याओं की सूची : 6, 3, 0, – 3, . . . के लिए

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

अतः यह भी एक A.P. है जिसका प्रथम पद 6 है और सार्व अंतर –3 है।

व्यापक रूप में, A.P. $a_1, a_2, . . ., a_n$ के लिए,

$$d = a_{k+1} - a_k$$

जहाँ a_{k+1} और a_k क्रमशः $(k + 1)$वें और kवें पद हैं।

एक दी हुई A.P. का d ज्ञात करने के लिए, हमें $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, ...$ में से सभी को ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं है। इनमें से किसी एक का ज्ञात करना ही पर्याप्त है।

संख्याओं की सूची 1, 1, 2, 3, 5, ... पर विचार कीजिए। केवल देखने से ही यह पता चल जाता है कि किन्हीं दो क्रमागत पदों का अंतर सदैव समान नहीं है। अतः यह एक A.P. नहीं है।

ध्यान दीजिए कि A.P. : 6, 3, 0, – 3, . . . का d ज्ञात करने के लिए, हमने 3 में से 6 को घटाया था, 6 में से 3 को नहीं घटाया था। अर्थात् d ज्ञात करने के लिए हमें $(k + 1)$ वें पद में kवें पद को ही घटाना चाहिए, चाहे $(k + 1)$ वाँ पद छोटा ही क्यों न हो।

आइए कुछ उदाहरणों की सहायता से इन अवधारणाओं (concepts) को और अधिक स्पष्ट करें।

उदाहरण 1 : A.P. : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, . . .,$ के लिए प्रथम पद a और सार्व अंतर d लिखिए।

हल : यहाँ $a = \frac{3}{2}, d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$ है।

याद रखिए कि यदि हमें यह ज्ञात हो जाए कि संख्याएँ A.P. में हैं, तो हम किन्हीं भी दो क्रमागत पदों का प्रयोग करके d ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 2 : संख्याओं की निम्नलिखित सूचियों में से कौन–कौन से A.P. नहीं हैं? यदि इनसे कोई A.P. है तो उसके अगले दो पद लिखिए।

(i) 4, 10, 16, 22, . . . (ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . .

(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . . (iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . .

हल : (i)
$$a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$$
$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$
$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

अर्थात्, प्रत्येक बार $a_{k+1} - a_k$ एक ही है।

अतः, दी हुई संख्याओं की सूची एक A.P. है जिसका सार्व अंतर $d = 6$ है।

इसके अगले दो पद $22 + 6 = 28$ और $28 + 6 = 34$ हैं।

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

अर्थात्, प्रत्येक बार $a_{k+1} - a_k$ एक ही है।

अतः, संख्याओं की दी हुई सूची एक A.P. है जिसका सार्व अंतर $d = -2$ है।

इसके अगले दो पद

$$-5 + (-2) = -7 \quad \text{और} \quad -7 + (-2) = -9 \text{ हैं।}$$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

चूँकि $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ हैं, इसलिए दी हुई संख्याओं की सूची से एक A.P. नहीं है।

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0,\quad a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0,\quad a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

यहाँ, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$ है।

अतः, दी हुई संख्याओं की सूची से एक A.P. नहीं है।

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित स्थितियों में से किन स्थितियों में संबद्ध संख्याओं की सूची A.P. है और क्यों?

(i) प्रत्येक किलो मीटर के बाद का टैक्सी का किराया, जबकि प्रथम किलो मीटर के लिए किराया ₹ 15 है और प्रत्येक अतिरिक्त किलो मीटर के लिए किराया ₹ 8 है।

(ii) किसी बेलन (cylinder) में उपस्थित हवा की मात्रा, जबकि वायु निकालने वाला पंप प्रत्येक बार बेलन की शेष हवा का $\frac{1}{4}$ भाग बाहर निकाल देता है।

(iii) प्रत्येक मीटर की खुदाई के बाद, एक कुँआ खोदने में आई लागत, जबकि प्रथम मीटर खुदाई की लागत ₹ 150 है और बाद में प्रत्येक मीटर खुदाई की लागत ₹ 50 बढ़ती जाती है।

(iv) खाते में प्रत्येक वर्ष का मिश्रधन, जबकि ₹ 10000 की राशि 8 % वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर जमा की जाती है।

2. दी हुई A.P. के प्रथम चार पद लिखिए, जबकि प्रथम पद a और सार्व अंतर d निम्नलिखित हैं:

(i) $a = 10, \quad d = 10$ (ii) $a = -2, \quad d = 0$

(iii) $a = 4, \quad d = -3$ (iv) $a = -1, \quad d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, \quad d = -0.25$

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक A.P. के लिए प्रथम पद तथा सार्व अंतर लिखिए :

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4. निम्नलिखित में से कौन-कौन A.P. हैं? यदि कोई A.P. है, तो इसका सार्व अंतर ज्ञात कीजिए और इनके तीन और पद लिखिए।

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$ (x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$ (xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$

5.3 A.P. का nवाँ पद

आइए अनुच्छेद 5.1 में दी हुई उस स्थिति पर पुनः विचार करें जिसमें रीना ने एक पद के लिए आवेदन किया था और वह चुन ली गई थी। उसे यह पद ₹ 8000 के मासिक वेतन और ₹ 500 वार्षिक की वेतन वृद्धि के साथ दिया गया था। पाँचवें वर्ष में उसका मासिक वेतन क्या होगा?

इसका उत्तर देने के लिए, आइए देखें कि उसका मासिक वेतन दूसरे वर्ष में क्या होगा।

यह (₹ 8000 + ₹ 500) = ₹ 8500 होगा। इसी प्रकार, हम तीसरे, चौथे और पाँचवें वर्षों के लिए, उसके मासिक वेतन, पिछले वर्ष के वेतन में ₹ 500 जोड़ कर ज्ञात कर सकते हैं। अतः, उसका तीसरे वर्ष का वेतन = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹ [8000 + **(3 – 1)** × 500]   **(तीसरे वर्ष** के लिए**)**

= ₹ 9000

चौथे वर्ष का वेतन = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 3 × 500)

= ₹ [8000 + **(4 – 1)** × 500]   **(चौथे वर्ष** के लिए**)**

= ₹ 9500

पाँचवें वर्ष का वेतन = ₹ (9500 + 500)

= ₹ (8000+500+500+500 + 500)

= ₹ (8000 + 4 × 500)

= ₹ [8000 + **(5 – 1)** × 500]   **(पाँचवें वर्ष** के लिए**)**

= ₹ 10000

ध्यान दीजिए कि यहाँ हमें संख्याओं की निम्नलिखित सूची मिल रही है :

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

ये संख्याएँ एक A.P. बना रही हैं। (क्यों?)

अब ऊपर बनने वाले प्रतिरूप (Pattern) को देखकर क्या आप उसका छठे वर्ष का मासिक वेतन ज्ञात कर सकते हैं? क्या 15वें वर्ष का मासिक वेतन ज्ञात कर सकते हैं? साथ ही, यह मानते हुए कि वह इस पद पर आगे भी कार्य करती रहेगी, 25वें वर्ष के लिए उसके मासिक वेतन के विषय में आप क्या कह सकते हैं? इसका उत्तर देने के लिए, आप पिछले वर्ष के वेतन में ₹ 500 जोड़कर वांछित वेतन परिकलित करेंगे। क्या आप इस प्रक्रिया को कुछ संक्षिप्त कर सकते हैं? आइए, देखें। जिस प्रकार हमने इन वेतनों को ऊपर प्राप्त किया है, उनसे आपको कुछ आभास तो लग गया होगा।

15वें वर्ष के लिए वेतन

= 14वें वर्ष के लिए वेतन + ₹ 500

$$= ₹\left[8000 + \underbrace{500 + 500 + 500 + \ldots + 500}_{13\ \text{बार}}\right] + ₹\ 500$$

= ₹ [8000 + 14 × 500]

= ₹ [8000 + **(15 – 1)** × 500] = ₹ 15000

अर्थात् प्रथम वेतन + (15 – 1) × वार्षिक वेतन वृद्धि

इसी प्रकार 25वें साल में उसका वेतन होगा :

₹ [8000 + **(25 – 1)** × 500] = ₹ 20000

= प्रथम वेतन + **(25 – 1)** × वार्षिक वेतन वृद्धि

इस उदाहरण से, आपको कुछ आभास तो अवश्य हो गया होगा कि एक A.P. के 15वें पद, 25वें पद और व्यापक रूप में, nवें पद को किस प्रकार लिखा जा सकता है।

मान लीजिए $a_1, a_2, a_3, \ldots$ एक A.P. है, जिसका प्रथम पद a है और सार्व अंतर d है। तब

दूसरा पद $a_2 = a + d = a + \mathbf{(2 - 1)}\, d$

तीसरा पद $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + \mathbf{(3 - 1)}\, d$

चौथा पद $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + \mathbf{(4 - 1)}\, d$

. . . .

. . . .

इस प्रतिरूप (Pattern) को देखते हुए, हम कह सकते हैं कि ***n*वाँ पद** $a_n = a + (n - 1) d$ है।

अत:, **प्रथम पद *a* और सार्व अंतर *d* वाली एक A.P. का *n*वाँ पद $a_n = a + (n - 1) d$ द्वारा प्राप्त होता है।**

a_n को A.P. का **व्यापक पद** (general term) भी कहते हैं। यदि **किसी A.P.** में *m* पद हैं, तो **a_m इसके अंतिम पद को निरूपित करता है, जिसे कभी-कभी *l* द्वारा भी व्यक्त किया जाता है।**

आइए अब कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 3 : A.P. : 2, 7, 12, . . . का 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ और $n = 10$ है।

चूँकि $a_n = a + (n - 1) d$ है, इसलिए

$$a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5 = 2 + 45 = 47$$

अत: दी हुई A.P. का 10वाँ पद 47 है।

उदाहरण 4 : A.P. : 21, 18, 15, . . . का कौन-सा पद – 81 है? साथ ही क्या इस A.P. का कोई पद शून्य है? सकारण उत्तर दीजिए।

हल : यहाँ, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ और $a_n = -81$ है। हमें *n* ज्ञात करना है।

चूँकि $a_n = a + (n - 1) d,$

अत: $-81 = 21 + (n - 1)(-3)$

या $-81 = 24 - 3n$

या $-105 = -3n$

अत: $n = 35$

इसलिए दी हुई A.P. का 35वाँ पद – 81 है।

आगे, हम यह जानना चाहते हैं कि क्या कोई *n* ऐसा है कि $a_n = 0$ हो। यदि ऐसा कोई *n* है तो

$$21 + (n - 1)(-3) = 0,$$

अर्थात् $3(n - 1) = 21$

या $$n = 8$$

अतः, 8वाँ पद 0 है।

उदाहरण 5 : वह A.P. निर्धारित कीजिए जिसका तीसरा पद 5 और 7वाँ पद 9 है।

हल : हमें प्राप्त है

$$a_3 = a + (3 - 1)\, d = a + 2d = 5 \qquad (1)$$

और $$a_7 = a + (7 - 1)\, d = a + 6d = 9 \qquad (2)$$

समीकरणों (1) और (2) के युग्म को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$a = 3, \quad d = 1$$

अतः वांछित A.P. : 3, 4, 5, 6, 7, . . . है।

उदाहरण 6 : क्या संख्याओं की सूची 5, 11, 17, 23, . . . का कोई पद 301 है? क्यों?

हल : हमें प्राप्त है :

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6, \quad a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6, \quad a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

चूँकि $k = 1, 2, 3$, आदि के लिए, $a_{k+1} - a_k$ एक समान संख्या होती है, इसलिए दी हुई सूची एक A.P. है।

यहाँ $a = 5$ और $d = 6$

मान लीजिए इस A.P. का nवाँ पद 301 है।

हम जानते हैं कि

$$a_n = a + (n - 1)\, d$$

इसलिए $$301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

अर्थात् $$301 = 6n - 1$$

अतः $$n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

परंतु n एक धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए (क्यों?)। अतः, 301 संख्याओं की दी हुई सूची का पद नहीं है।

उदाहरण 7 : दो अंकों वाली कितनी संख्याएँ 3 से विभाज्य हैं?

हल : 3 से विभाज्य होने वाली दो अंकों की संख्याओं की सूची है :

$$12, 15, 18, \ldots, 99$$

क्या यह एक A.P. है? हाँ, यह है। यहाँ $a = 12$, $d = 3$ और $a_n = 99$ है।

चूँकि $a_n = a + (n-1)\, d$,

इसलिए $99 = 12 + (n-1) \times 3$

अर्थात् $87 = (n-1) \times 3$

अर्थात् $n - 1 = \frac{87}{3} = 29$

अर्थात् $n = 29 + 1 = 30$

अत:, 3 से विभाज्य दो अंकों वाली 30 संख्याएँ हैं।

उदाहरण 8 : A.P. : 10, 7, 4, . . ., – 62 का अंतिम पद से (प्रथम पद की ओर) 11वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $a = 10$, $d = 7 - 10 = -3$, $l = -62$,

जहाँ $l = a + (n-1)\, d$

अंतिम पद से 11वाँ पद ज्ञात करने के लिए, हम इस AP के कुल पदों की संख्या ज्ञात करेंगे।

अत: $-62 = 10 + (n-1)(-3)$

या $-72 = (n-1)(-3)$

अर्थात् $n - 1 = 24$

या $n = 25$

अत:, दी हुई A.P. में 25 पद हैं।

अंतिम पद से 11वाँ पद AP का 15वाँ पद होगा। (ध्यान दीजिए कि यह 14वाँ पद नहीं होगा। क्यों?)

अत:, $a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$

इसलिए, अंतिम पद से 11वाँ पद – 32 है।

वैकल्पिक हल:

यदि हम A.P. को विपरीत ओर से देखें, तो इसका प्रथम पद $a = -62$ है और सार्व अंतर $d = 3$ है। (क्यों?)

अब, प्रश्न यह बन जाता है कि इस AP का 11वाँ पद ज्ञात किया जाए।

अत: $$a_{11} = -62 + (11-1) \times 3 = -62 + 30 = -32$$

अत: अंतिम पद से 11वाँ वांछित पद – 32 है।

उदाहरण 9 : ₹ 1000 की एक धनराशि 8% वार्षिक साधारण ब्याज पर निवेश की जाती है। प्रत्येक वर्ष के अंत में ब्याज परिकलित कीजिए। क्या ये ब्याज एक A.P. बनाते हैं? यदि ऐसा है, तो इस तथ्य का प्रयोग करते हुए 30 वर्षों के अंत में ब्याज परिकलित कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि साधारण ब्याज परिकलित करने के लिए सूत्र निम्नलिखित है:

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

अत:, प्रथम वर्ष के अंत में ब्याज = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 1}{100}$ = ₹ 80

दूसरे वर्ष के अंत में ब्याज = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 2}{100}$ = ₹ 160

तीसरे वर्ष के अंत में ब्याज = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 3}{100}$ = ₹ 240

इसी प्रकार, हम चौथे, पाँचवें, इत्यादि वर्षों के अंत में ब्याज परिकलित कर सकते हैं।

अत:, पहले, दूसरे, तीसरे, ... वर्षों के अंत में ब्याज (₹ में) क्रमश: हैं :

$$80, 160, 240, \ldots$$

यह एक A.P. है, क्योंकि किन्हीं दो क्रमागत पदों का अंतर 80 है, अर्थात् $d = 80$ है। साथ ही, इसमें $a = 80$ है।

अत:, 30 वर्षों के अंत में ब्याज ज्ञात करने के लिए हम a_{30} ज्ञात करेंगे।

अब $$a_{30} = a + (30-1)\,d = 80 + 29 \times 80 = 2400$$

अत: 30 वर्षों के अंत में ब्याज ₹ 2400 होगा।

उदाहरण 10 : फूलों की एक क्यारी की पहली पंक्ति में 23 गुलाब के पौधे हैं, दूसरी पंक्ति में 21 गुलाब के पौधे हैं, तीसरी पंक्ति में 19 गुलाब के पौधे हैं, इत्यादि। उसकी अंतिम पंक्ति में 5 गुलाब के पौधे हैं। इस क्यारी में कुल कितनी पंक्तियाँ हैं?

हल : पहली, दूसरी, तीसरी, ... पंक्तियों में गुलाब के पौधों की संख्याएँ क्रमशः निम्नलिखित हैं:

$$23, 21, 19, \ldots, 5$$

ये एक A.P. बनाती हैं (क्यों?)। मान लीजिए पंक्तियों की संख्या n है।

तब $a = 23, \quad d = 21 - 23 = -2$ और $a_n = 5$ है।

चूँकि $a_n = a + (n - 1)\,d$

इसलिए

$$5 = 23 + (n - 1)(-2)$$

अर्थात् $-18 = (n - 1)(-2)$

या $n = 10$

अतः फूलों की क्यारी में 10 पंक्तियाँ हैं।

प्रश्नावली 5.2

1. निम्नलिखित सारणी में, रिक्त स्थानों को भरिए, जहाँ AP का प्रथम पद a, सार्व अंतर d और nवाँ पद a_n है:

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	. . .
(ii)	– 18	. . .	10	0
(iii)	. . .	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	. . .	3.6
(v)	3.5	0	105	. . .

2. निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए और उसका औचित्य दीजिए:

(i) A.P.: 10, 7, 4, . . . , का 30वाँ पद है:

(A) 97 (B) 77 (C) –77 (D) – 87

(ii) A.P.: $-3, -\frac{1}{2}, 2, \ldots,$ का 11वाँ पद है:

(A) 28 (B) 22 (C) –38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3. निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों में, रिक्त खानों (boxes) के पदों को ज्ञात कीजिए :

(i) 2, $\square$, 26

(ii) $\square$, 13, $\square$, 3

(iii) 5, $\square$, $\square$, $9\frac{1}{2}$

(iv) -4, $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, 6

(v) $\square$, 38, $\square$, $\square$, $\square$, -22

4. A.P. : 3, 8, 13, 18, . . . का कौन सा पद 78 है?

5. निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों में से प्रत्येक श्रेढ़ी में कितने पद हैं?

(i) 7, 13, 19, . . . , 205

(ii) 18, $15\frac{1}{2}$, 13, . . . , -47

6. क्या A.P., 11, 8, 5, 2 . . . का एक पद -150 है? क्यों?

7. उस A.P. का 31वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 11वाँ पद 38 है और 16वाँ पद 73 है।

8. एक A.P. में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अंतिम पद 106 है। इसका 29वाँ पद ज्ञात कीजिए।

9. यदि किसी A.P. के तीसरे और नौवें पद क्रमश: 4 और -8 हैं, तो इसका कौन-सा पद शून्य होगा?

10. किसी A.P. का 17वाँ पद उसके 10वें पद से 7 अधिक है। इसका सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

11. A.P. : 3, 15, 27, 39, ... का कौन-सा पद उसके 54वें पद से 132 अधिक होगा?

12. दो समांतर श्रेढ़ियों का सार्व अंतर समान है। यदि इनके 100वें पदों का अंतर 100 है, तो इनके 1000वें पदों का अंतर क्या होगा?

13. तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं?

14. 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज हैं?

15. n के किस मान के लिए, दोनों समांतर श्रेढ़ियों 63, 65, 67, ... और 3, 10, 17, . . . के nवें पद बराबर होंगे?

16. वह A.P. ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 16 है और 7वाँ पद 5वें पद से 12 अधिक है।

17. A.P. : 3, 8, 13, ..., 253 में अंतिम पद से 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

18. किसी A.P. के चौथे और 8वें पदों का योग 24 है तथा छठे और 10वें पदों का योग 44 है। इस A.P. के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।

19. सुब्बा राव ने 1995 में ₹ 5000 के मासिक वेतन पद कार्य आरंभ किया और प्रत्येक वर्ष ₹ 200 की वेतन वृद्धि प्राप्त की। किस वर्ष में उसका वेतन ₹ 7000 हो गया?

20. रामकली ने किसी वर्ष के प्रथम सप्ताह में ₹ 5 की बचत की और फिर अपनी साप्ताहिक बचत ₹ 1.75 बढ़ाती गई। यदि nवें सप्ताह में उसकी साप्ताहिक बचत ₹ 20.75 हो जाती है, तो n ज्ञात कीजिए।

5.4 A.P. के प्रथम n पदों का योग

आइए अनुच्छेद 5.1 में दी हुई स्थिति पर पुनः विचार करें, जिसमें शकीला अपनी पुत्री की गुल्लक में, उसके 1 वर्ष की हो जाने पर ₹ 100 डालती है, उसके दूसरे जन्म दिवस पर ₹ 150, तीसरे जन्म दिवस पर ₹ 200 डालती है और ऐसा आगे जारी रखती है। जब उसकी पुत्री 21 वर्ष की हो जाएगी, तो उसकी गुल्लक में कितनी धनराशि एकत्रित हो जाएगी?

यहाँ, उसके प्रथम, दूसरे, तीसरे, चौथे, ... जन्म दिवसों पर, उसकी गुल्लक में डाली गई राशियाँ (₹ में) क्रमशः 100, 150, 200, 250, ... हैं तथा यही क्रम उसके 21वें जन्म दिवस तक चलता रहा। 21वें जन्म दिवस तक एकत्रित हुई कुल धनराशि ज्ञात करने के लिए, हमें उपरोक्त सूची की संख्याओं को जोड़ने की आवश्यकता है। क्या आप यह नहीं सोचते कि यह एक जटिल प्रक्रिया होगी और इसमें समय भी अधिक लगेगा? क्या हम इस प्रक्रिया को संक्षिप्त बना सकते हैं? यह तभी संभव होगा, जब हम इसका योग निकालने की कोई विधि ज्ञात कर लें। आइए देखें।

हम गॉस (जिसके बारे में आप अध्याय 1 में पढ़ चुके हैं) को दी गई समस्या पर विचार करते हैं, जो उसे हल करने के लिए उस समय दी गई थी, जब वह केवल 10 वर्ष का था। उससे 1 से 100 तक के धन पूर्णांकों का योग ज्ञात करने को कहा गया। उसने तुरंत उत्तर दिया कि योग 5050 है। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि उसने ऐसा कैसे किया था? उसने इस प्रकार लिखा:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

फिर, उसने उल्टे क्रम संख्याओं को इस प्रकार लिखा:

$$S = 100 + 99 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

उपरोक्त को जोड़ने पर उसने प्राप्त किया:

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + \ldots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 \quad \text{(100 बार)}$$

अत: $S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$, अर्थात् योग = 5050

अब, हम इसी तकनीक का उपयोग करते हुए, एक A.P. के प्रथम n पदों का योग ज्ञात करेंगे। मान लीजिए यह A.P. है :

$$a, a + d, a + 2d, \ldots$$

इस A.P. का nवाँ पद $a + (n - 1)\, d$ है। माना S इस A.P. के प्रथम n पदों के योग को व्यक्त करता है। तब

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1)\, d] \qquad (1)$$

पदों को विपरीत क्रम में लिखने पर हमें प्राप्त होता है:

$$S = [a + (n - 1)\, d] + [a + (n - 2)\, d] + \ldots + (a + d) + a \qquad (2)$$

अब, (1) और (2) को पदों के अनुसार जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2S = \underbrace{[2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \cdots + [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d]}_{n \text{ बार}}$$

या $2S = n\,[2a + (n - 1)\, d]$ (चूँकि इसमें n पद हैं)

या $S = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\, d]$

अत: **किसी A.P. के प्रथम n पदों का योग S निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होता है:**

$$\mathbf{S = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\, d]}$$

हम इसे इस रूप में भी लिख सकते हैं

$$S = \frac{n}{2}\,[a + a + (n - 1)\, d]$$

अर्थात् $$S = \frac{n}{2}\,(a + a_n) \qquad (3)$$

अब, यदि किसी A.P. में केवल n ही पद हैं, तो a_n अंतिम पद l के बराबर होगा। अत: (3) से हम देखते हैं कि

$$S = \frac{n}{2}\,(a + l) \qquad (4)$$

परिणाम का यह रूप उस स्थिति में उपयोगी है, जब A.P. के प्रथम और अंतिम पद दिए हों तथा सार्व अंतर नहीं दिया गया हो।

अब हम उसी प्रश्न पर वापस आ जाते हैं, जो प्रारंभ में हमसे पूछा गया था। शकीला की पुत्री की गुल्लक में उसके पहले, दूसरे, तीसरे, . . ., जन्म दिवसों पर डाली गई धनराशियाँ (₹ में) क्रमश: 100, 150, 200, 250, . . ., हैं।

यह एक A.P. है। हमें उसके 21वें जन्मदिवस तक एकत्रित हुई कुल धनराशि ज्ञात करनी है, अर्थात् हमें इस A.P. के प्रथम 21 पदों का योग ज्ञात करना है।

यहाँ $a = 100$, $d = 50$ और $n = 21$ है। सूत्र

$$S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\,d\right]$$ का प्रयोग करने पर,

$$S = \frac{21}{2}\left[2 \times 100 + (21-1) \times 50\right] = \frac{21}{2}\left[200 + 1000\right]$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

अत: उसके 21वें जन्म दिवस तक एकत्रित हुई गुल्लक में धनराशि ₹ 12600 है।

क्या सूत्र के प्रयोग से प्रश्न हल करना सरल नहीं हो गया है?

किसी A.P. के n पदों के योग को व्यक्त करने के लिए, हम S के स्थान पर S_n का भी प्रयोग करते हैं। उदाहरणार्थ, हम A.P. के 20 पदों के योग को व्यक्त करने के लिए S_{20} का प्रयोग करते हैं। प्रथम n पदों के योग के सूत्र में, चार राशियाँ S, a, d और n संबद्ध हैं। यदि इनमें से कोई तीन राशियाँ ज्ञात हों, तो चौथी राशि ज्ञात की जा सकती है।

टिप्पणी : किसी A.P. का nवाँ पद उसके प्रथम n पदों के योग और प्रथम $(n-1)$ पदों के योग के अंतर के बराबर है। अर्थात् $a_n = S_n - S_{n-1}$ है।

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 11 : A.P. : 8, 3, –2, . . . के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$ और $n = 22$ है।

हम जानते हैं कि

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$$

अत:
$$S = \frac{22}{2}[16 + 21\,(-5)] = 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$$

इसलिए दी हुई A.P. के प्रथम 22 पदों का योग – 979 है।

उदाहरण 12 : यदि किसी A.P. के प्रथम 14 पदों का योग 1050 है तथा इसका प्रथम पद 10 है तो 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $S_{14} = 1050$, $n = 14$ और $a = 10$ है।

चूँकि
$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

इसलिए
$$1050 = \frac{14}{2}[20 + 13d] = 140 + 91d$$

अर्थात्
$$910 = 91d$$

या
$$d = 10$$

अत:
$$a_{20} = 10 + (20 - 1) \times 10 = 200$$

अर्थात् 20वाँ पद 200 है।

उदाहरण 13 : A.P. : 24, 21, 18, . . . के कितने पद लिए जाएँ, ताकि उनका योग 78 हो?

हल : यहाँ $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$ और $S_n = 78$ है। हमें n ज्ञात करना है।

हम जानते हैं कि
$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

अत:
$$78 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-3)] = \frac{n}{2}[51 - 3n]$$

या $$3n^2 - 51n + 156 = 0$$

या $$n^2 - 17n + 52 = 0$$

या $$(n-4)(n-13) = 0$$

अतः $$n = 4 \text{ या } 13$$

n के ये दोनों मान संभव हैं और स्वीकार किए जा सकते हैं। अतः, पदों की वांछित संख्या या तो 4 है या 13 है।

टिप्पणी :

1. इस स्थिति में, प्रथम 4 पदों का योग = प्रथम 13 पदों का योग = 78 है।
2. ये दोनों उत्तर संभव हैं, क्योंकि 5वें से 13वें पदों तक का योग शून्य हो जाएगा। यह इसलिए है कि यहाँ a धनात्मक है और d ऋणात्मक है, जिससे कुछ पद धनात्मक और कुछ पद ऋणात्मक हो जाते हैं तथा परस्पर कट जाते हैं।

उदाहरण 14 : निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :

(i) प्रथम 1000 धन पूर्णांक (ii) प्रथम n धन पूर्णांक

हल :

(i) मान लीजिए $S = 1 + 2 + 3 + . . . + 1000$ है।

A.P. के प्रथम n पदों के योग के सूत्र $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1+1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

अतः, प्रथम 1000 धन पूर्णांकों का योग 500500 है।

(ii) मान लीजिए $S_n = 1 + 2 + 3 + . . . + n$ है।

यहाँ $a = 1$ और अंतिम पद $l = n$ है।

अतः $$S_n = \frac{n(1+n)}{2} \quad \text{या} \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

इस प्रकार, **प्रथम n धन पूर्णांकों का योग सूत्र**

$$\mathbf{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

से प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण 15 : संख्याओं की उस सूची के प्रथम 24 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका nवाँ पद $a_n = 3 + 2n$ से दिया जाता है।

हल :

चूँकि $a_n = 3 + 2n$ है

इसलिए
$$a_1 = 3 + 2 = 5$$
$$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$$
$$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$$
$$\vdots$$

इस प्रकार प्राप्त संख्याओं की सूची 5, 7, 9, 11, . . . है।

यहाँ $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ इत्यादि हैं।

अत: इनसे एक A.P. बनती है, जिसका सार्व अंतर 2 है।

S_{24} ज्ञात करने के लिए, हमें प्राप्त है: $n = 24, \quad a = 5, \quad d = 2$

अत:
$$S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24 - 1) \times 2] = 12[10 + 46] = 672$$

इसलिए संख्याओं की दी हुई सूची के प्रथम 24 पदों का योग 672 है।

उदाहरण 16 : टी.वी. सेटों का निर्माता तीसरे वर्ष में 600 टी.वी. तथा 7वें वर्ष में 700 टी.वी. सेटों का उत्पादन करता है। यह मानते हुए कि प्रत्येक वर्ष उत्पादन में एक समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, ज्ञात कीजिए:

(i) प्रथम वर्ष में उत्पादन

(ii) 10वें वर्ष में उत्पादन

(iii) प्रथम 7 वर्षों में कुल उत्पादन

हल : (i) चूँकि प्रत्येक वर्ष उत्पादन में समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, इसलिए पहले, दूसरे, तीसरे, ... वर्षों में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्याएँ एक AP में होंगी।

आइए nवें वर्ष में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्या को a_n से व्यक्त करें।

अत: $a_3 = 600$ और $a_7 = 700$

या
$$a + 2d = 600$$

और
$$a + 6d = 700$$

इन्हें हल करने पर, हमें $d = 25$ और $a = 550$ प्राप्त होता है।

अत: प्रथम वर्ष में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्या 550 है।

(ii) अब $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

अत: 10वें वर्ष में उत्पादित टी.वी. सेटों की संख्या 775 है।

(iii) साथ ही $S_7 = \frac{7}{2}\left[2 \times 550 + (7-1) \times 25\right]$

$$= \frac{7}{2}\left[1100 + 150\right] = 4375$$

अत: प्रथम 7 वर्षों में कुल उत्पादित हुए सभी टी.वी. सेटों की संख्या 4375 है।

प्रश्नावली 5.3

1. निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों का योग ज्ञात कीजिए :

(i) 2, 7, 12, . . ., 10 पदों तक (ii) –37, –33, –29, . . ., 12 पदों तक

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . ., 100 पदों तक (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$, . . ., 11 पदों तक

2. नीचे दिए हुए योगफलों को ज्ञात कीजिए :

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3. एक A.P. में,

(i) $a = 5$, $d = 3$ और $a_n = 50$ दिया है। n और S_n ज्ञात कीजिए।

(ii) $a = 7$ और $a_{13} = 35$ दिया है। d और S_{13} ज्ञात कीजिए।

(iii) $a_{12} = 37$ और $d = 3$ दिया है। a और S_{12} ज्ञात कीजिए।

(iv) $a_3 = 15$ और $S_{10} = 125$ दिया है। d और a_{10} ज्ञात कीजिए।

(v) $d = 5$ और $S_9 = 75$ दिया है। a और a_9 ज्ञात कीजिए।

(vi) $a = 2$, $d = 8$ और $S_n = 90$ दिया है। n और a_n ज्ञात कीजिए।

(vii) $a = 8$, $a_n = 62$ और $S_n = 210$ दिया है। n और d ज्ञात कीजिए।

(viii) $a_n = 4$, $d = 2$ और $S_n = -14$ दिया है। n और a ज्ञात कीजिए।

(ix) $a = 3$, $n = 8$ और $S = 192$ दिया है। d ज्ञात कीजिए।

(x) $l = 28$, $S = 144$ और कुल 9 पद हैं। a ज्ञात कीजिए।

4. 636 योग प्राप्त करने के लिए, A.P. : 9, 17, 25, . . . के कितने पद लेने चाहिए?

5. किसी A.P. का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 और योग 400 है। पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

6. किसी A.P. के प्रथम और अंतिम पद क्रमशः 17 और 350 हैं। यदि सार्व अंतर 9 है, तो इसमें कितने पद हैं और इनका योग क्या है?

7. उस A.P. के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसमें $d = 7$ है और 22वाँ पद 149 है।

8. उस A.P. के प्रथम 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसके दूसरे और तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 हैं।

9. यदि किसी A.P. के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो इसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

10. दर्शाइए कि $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ से एक A.P. बनती है, यदि a_n नीचे दिए अनुसार परिभाषित है :

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

साथ ही, प्रत्येक स्थिति में, प्रथम 15 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

11. यदि किसी A.P. के प्रथम n पदों का योग $4n - n^2$ है, तो इसका प्रथम पद (अर्थात् S_1) क्या है? प्रथम दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है? इसी प्रकार, तीसरे, 10वें और nवें पद ज्ञात कीजिए।

12. ऐसे प्रथम 40 धन पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए जो 6 से विभाज्य हैं।

13. 8 के प्रथम 15 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।

14. 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

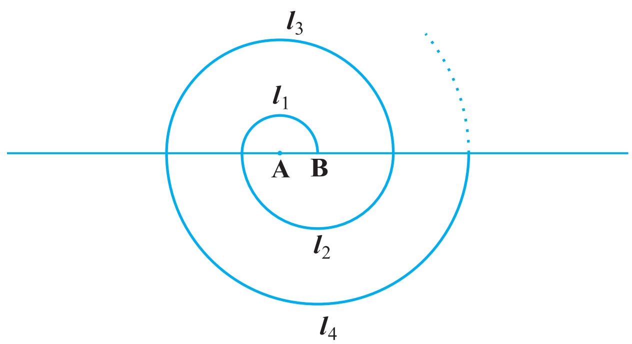
15. निर्माण कार्य से संबंधित किसी ठेके में, एक निश्चित तिथि के बाद कार्य को विलंब से पूरा करने के लिए, जुर्माना लगाने का प्रावधान इस प्रकार है : पहले दिन के लिए ₹ 200, दूसरे दिन के लिए ₹ 250, तीसरे दिन के लिए ₹ 300 इत्यादि, अर्थात् प्रत्येक उतरोत्तर दिन का जुर्माना अपने से ठीक पहले दिन के जुर्माने से ₹ 50 अधिक है। एक ठेकेदार को जुर्माने के रूप में कितनी राशि अदा करनी पड़ेगी, यदि वह इस कार्य में 30 दिन का विलंब कर देता है?

16. किसी स्कूल के विद्यार्थियों को उनके समग्र शैक्षिक प्रदर्शन के लिए 7 नकद पुरस्कार देने के लिए ₹ 700 की राशि रखी गई है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले पुरस्कार से ₹ 20 कम है, तो प्रत्येक पुरस्कार का मान ज्ञात कीजिए।

17. एक स्कूल के विद्यार्थियों ने वायु प्रदूषण कम करने के लिए स्कूल के अंदर और बाहर पेड़ लगाने के बारे में सोचा। यह निर्णय लिया गया कि प्रत्येक कक्षा का प्रत्येक अनुभाग अपनी कक्षा की संख्या के बराबर पेड़ लगाएगा। उदाहरणार्थ, कक्षा I का एक अनुभाग 1 पेड़ लगाएगा, कक्षा

II का एक अनुभाग 2 पेड़ लगाएगा, कक्षा III का एक अनुभाग 3 पेड़ लगाएगा, इत्यादि और ऐसा कक्षा XII तक के लिए चलता रहेगा। प्रत्येक कक्षा के तीन अनुभाग हैं। इस स्कूल के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या कितनी होगी?

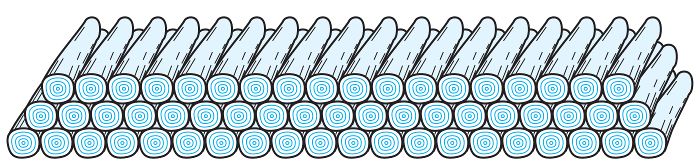
18. केंद्र A से प्रारंभ करते हुए, बारी-बारी से केंद्रों A और B को लेते हुए, त्रिज्याओं 0.5 cm, 1.0 cm, 1.5 cm, 2.0 cm, ... वाले उतरोत्तर अर्धवृत्तों को खींचकर एक सर्पिल (spiral) बनाया गया है, जैसाकि आकृति 5.4 में दर्शाया गया है। तेरह क्रमागत अर्धवृत्तों से बने इस सर्पिल की कुल लंबाई क्या है? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।)



आकृति 5.4

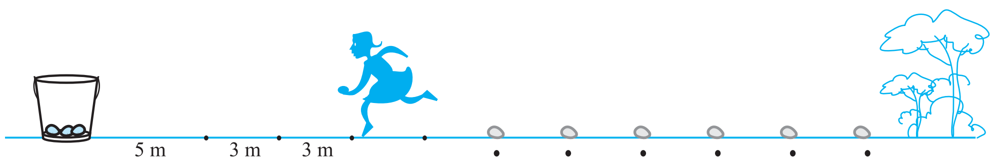
[**संकेत :** क्रमश: केंद्रों A, B, A, B, . . . वाले अर्धवृत्तों की लंबाइयाँ l_1, l_2, l_3, l_4 हैं।]

19. 200 लट्ठों (logs) को ढेरी के रूप में इस प्रकार रखा जाता है : सबसे नीचे वाली पंक्ति में 20 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 19 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 18 लट्ठे, इत्यादि (देखिए आकृति 5.5)। ये 200 लट्ठे कितनी पंक्तियों में रखे गए हैं तथा सबसे ऊपरी पंक्ति में कितने लट्ठे हैं?



आकृति 5.5

20. एक आलू दौड़ (potato race) में, प्रारंभिक स्थान पर एक बाल्टी रखी हुई है, जो पहले आलू से 5m की दूरी पर है, तथा अन्य आलुओं को एक सीधी रेखा में परस्पर 3m की दूरियों पर रखा गया है। इस रेखा पर 10 आलू रखे गए हैं (देखिए आकृति 5.6)।



आकृति 5.6

प्रत्येक प्रतियोगी बाल्टी से चलना प्रारंभ करती है, निकटतम आलू को उठाती है, उसे लेकर वापस आकर दौड़कर बाल्टी में डालती है, दूसरा आलू उठाने के लिए वापस दौड़ती है, उसे उठाकर वापस बाल्टी में डालती है, और वह ऐसा तब तक करती रहती है, जब तक सभी आलू बाल्टी में न आ जाएँ। इसमें प्रतियोगी को कुल कितनी दूरी दौड़नी पड़ेगी?

[**संकेत :** पहले और दूसरे आलुओं को उठाकर बाल्टी में डालने तक दौड़ी गई दूरी $= 2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$ है।]

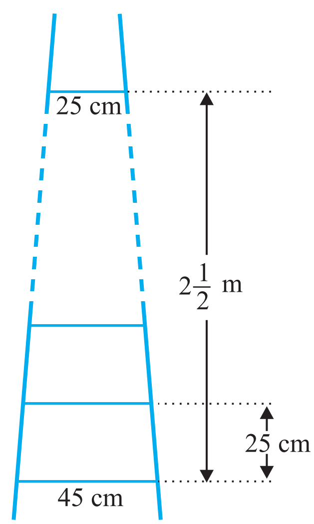
प्रश्नावली 5.4 (ऐच्छिक)*

1. A.P. : 121, 117, 113, . . ., का कौन-सा पद सबसे पहला ऋणात्मक पद होगा?
[**संकेत :** $a_n < 0$ के लिए n ज्ञात कीजिए।]

2. किसी A.P. के तीसरे और सातवें पदों का योग 6 है और उनका गुणनफल 8 है। इस A.P. के प्रथम 16 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

3. एक सीढ़ी के क्रमागत डंडे परस्पर 25 cm की दूरी पर हैं (देखिए आकृति 5.7)। डंडों की लंबाई एक समान रूप से घटती जाती हैं तथा सबसे निचले डंडे की लंबाई 45 cm है और सबसे ऊपर वाले डंडे की लंबाई 25 cm है। यदि ऊपरी और निचले डंडे के बीच की दूरी $2\frac{1}{2}$ m है, तो डंडों को बनाने के लिए लकड़ी की कितनी लंबाई की आवश्यकता होगी?

[**संकेत :** डंडों की संख्या $= \frac{250}{25} + 1$ है।]



आकृति 5.7

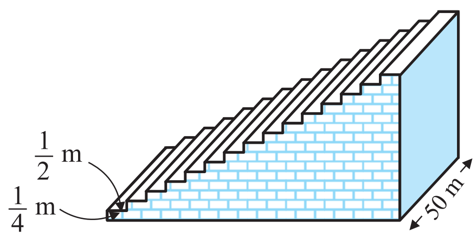
* यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

4. एक पंक्ति के मकानों को क्रमागत रूप से संख्या 1 से 49 तक अंकित किया गया है। दर्शाइए कि x का एक ऐसा मान है कि x से अंकित मकान से पहले के मकानों की संख्याओं का योग उसके बाद वाले मकानों की संख्याओं के योग के बराबर है। x का मान ज्ञात कीजिए।

[**संकेत :** $S_{x-1} = S_{49} - S_x$ है।]

5. एक फुटबाल के मैदान में एक छोटा चबूतरा है जिसमें 15 सीढ़ियाँ बनी हुई हैं। इन सीढ़ियों में से प्रत्येक की लंबाई 50 m है और वह ठोस कंक्रीट (concrete) की बनी है। प्रत्येक सीढ़ी में $\frac{1}{4}$ m की चढ़ाई है और $\frac{1}{2}$ m का फैलाव (चौड़ाई) है। (देखिए आकृति 5.8)। इस चबूतरे को बनाने में लगी कंक्रीट का कुल आयतन परिकलित कीजिए।

[**संकेत :** पहली सीढ़ी को बनाने में लगी कंक्रीट का आयतन $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50\ m^3$ है।]



आकृति 5.8

5.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. एक समांतर श्रेढ़ी संख्याओं की ऐसी सूची होती है, जिसमें प्रत्येक पद (प्रथम पद के अतिरिक्त) अपने से ठीक पहले पद में एक निश्चित संख्या d जोड़कर प्राप्त होता है। यह निश्चित संख्या d इस समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर कहलाती है।

एक A.P. का व्यापक रूप $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots$ है।

2. संख्याओं की एक दी हुई सूची A.P. होती है, यदि अंतरों $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots,$ से एक ही (समान) मान प्राप्त हो, अर्थात् k के विभिन्न मानों के लिए $a_{k+1} - a_k$ एक ही हो।

3. प्रथम पद a और सार्व अंतर d वाली A.P. का nवाँ पद (या व्यापक पद) a_n निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है:

$$a_n = a + (n-1)\,d$$

4. किसी A.P. के प्रथम n पदों का योग S सूत्र

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$ से प्राप्त होता है।

5. यदि एक परिमित, A.P. का अंतिम पद (मान लीजिए n वाँ पद) l है, तो इस A.P. के सभी पदों का योग S सूत्र

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$ से प्राप्त होता है।

पाठकों के लिए विशेष

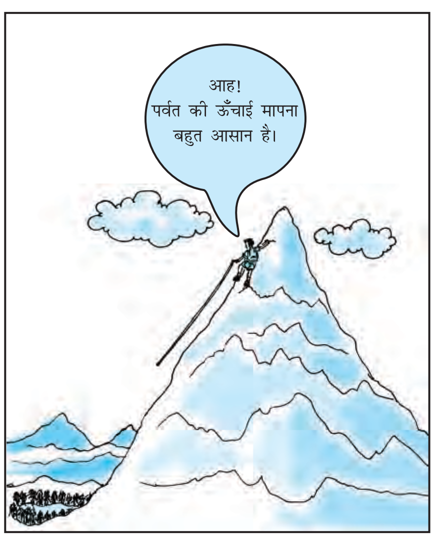
यदि $a, b, c,$ A.P. में हैं तब $b = \frac{a+c}{2}$ और b, a तथा c का समांतर माध्य कहलाता है।

T063CH06

त्रिभुज (Triangles) 6

6.1 भूमिका

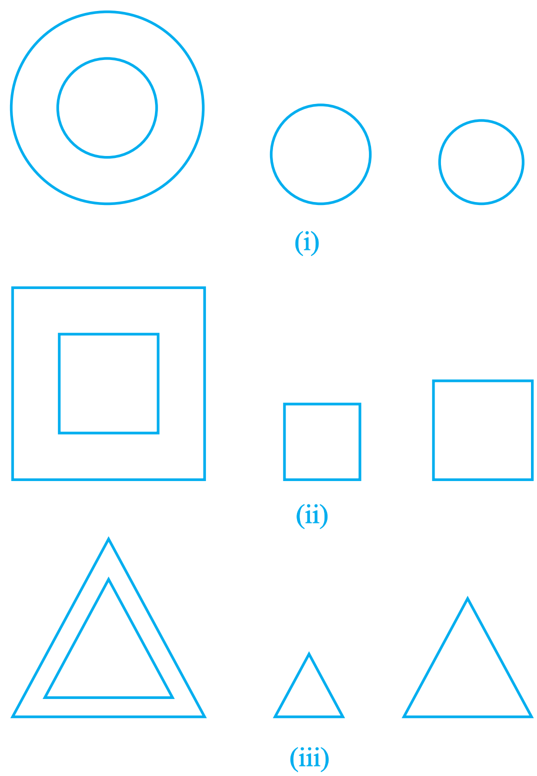
आप अपनी पिछली कक्षाओं से, त्रिभुजों और उनके अनेक गुणधर्मों से भली भाँति परिचित हैं। कक्षा IX में, आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता के बारे में विस्तृत रूप से अध्ययन कर चुके हैं। याद कीजिए कि दो त्रिभुज सर्वांगसम तब कहे जाते हैं जब उनके समान आकार (shape) तथा समान आमाप (size) हों। इस अध्याय में, हम ऐसी आकृतियों के बारे में अध्ययन करेंगे जिनके आकार समान हों परंतु उनके आमाप का समान होना आवश्यक नहीं हो। दोआकृतियाँ जिनके समान आकार हों (परंतु समान आमाप होना आवश्यक न हो) *समरूप आकृतियाँ* (*similar figures*) कहलाती हैं। विशेष रूप से, हम समरूप त्रिभुजों की चर्चा करेंगे तथा इस जानकारी को पहले पढ़ी गई पाइथागोरस प्रमेय की एक सरल उपपत्ति देने में प्रयोग करेंगे।



क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि पर्वतों (जैसे माऊंट एवरेस्ट) की ऊँचाईयाँ अथवा कुछ दूरस्थ वस्तुओं (जैसे चन्द्रमा) की दूरियाँ किस प्रकार ज्ञात की गई हैं? क्या आप सोचते हैं कि इन्हें एक मापने वाले फीते से सीधा (प्रत्यक्ष) मापा गया है? वास्तव में, इन सभी ऊँचाई और दूरियों को अप्रत्यक्ष मापन (indirect measurement) की अवधारणा का प्रयोग करते हुए ज्ञात किया गया है, जो आकृतियों की समरूपता के सिद्धांत पर आधारित है (देखिए उदाहरण 7, प्रश्नावली 6.3 का प्रश्न 15 तथा साथ ही इस पुस्तक के अध्याय 8 और 9)।

6.2 समरूप आकृतियाँ

कक्षा IX में, आपने देखा था कि समान (एक ही) त्रिज्या वाले सभी वृत्त सर्वांगसम होते हैं, समान लंबाई की भुजा वाले सभी वर्ग सर्वांगसम होते हैं तथा समान लंबाई की भुजा वाले सभी समबाहु त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।



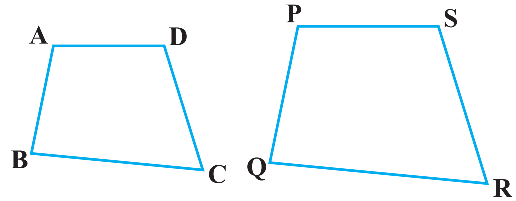
आकृति 6.1

अब किन्हीं दो (या अधिक) वृत्तों पर विचार कीजिए [देखिए आकृति 6.1 (i)]। क्या ये सर्वांगसम हैं? चूँकि इनमें से सभी की त्रिज्या समान नहीं है, इसलिए ये परस्पर सर्वांगसम नहीं हैं। ध्यान दीजिए कि इनमें कुछ सर्वांगसम हैं और कुछ सर्वांगसम नहीं हैं, परंतु इनमें से सभी के आकार समान हैं। अत:, ये सभी वे आकृतियाँ हैं जिन्हें हम *समरूप* (*similar*) कहते हैं। दो समरूप आकृतियों के आकार समान होते हैं परंतु इनके आमाप समान होने आवश्यक नहीं है। अत:, सभी वृत्त समरूप होते हैं। दो (या अधिक) वर्गों के बारे में अथवा दो (या अधिक) समबाहु त्रिभुजों के बारे में आप क्या सोचते हैं [देखिए आकृति 6.1 (ii) और (iii)]? सभी वृत्तों की तरह ही, यहाँ सभी वर्ग समरूप हैं तथा सभी समबाहु त्रिभुज समरूप हैं।

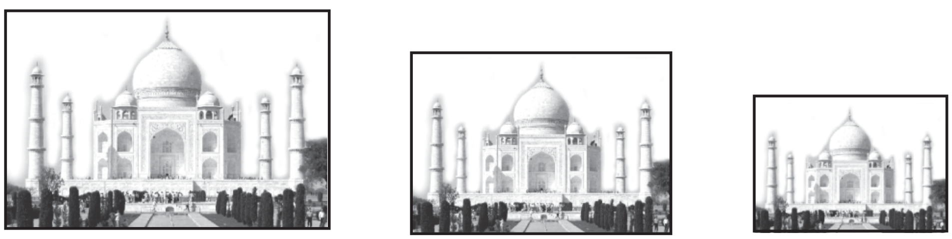
उपरोक्त चर्चा से, हम यह भी कह सकते हैं कि *सभी सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं, परंतु सभी समरूप आकृतियों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।*

क्या एक वृत्त और एक वर्ग समरूप हो सकते हैं? क्या एक त्रिभुज और एक वर्ग समरूप हो सकते हैं? इन आकृतियों को देखने मात्र से ही आप प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं (देखिए आकृति 6.1)। स्पष्ट शब्दों में, ये आकृतियाँ समरूप नहीं हैं। (क्यों?)

आप दो चतुर्भुजों ABCD और PQRS के बारे में क्या कह सकते हैं (देखिए आकृति 6.2)? क्या ये समरूप हैं? ये आकृतियाँ समरूप-सी प्रतीत हो रही हैं, परंतु हम इसके बारे में निश्चित रूप से कुछ नहीं कह सकते। इसलिए, यह आवश्यक हो जाता है कि हम आकृतियों की समरूपता के लिए कोई परिभाषा ज्ञात करें तथा इस परिभाषा पर आधारित यह सुनिश्चित करने के लिए कि दो दी हुई आकृतियाँ समरूप हैं या नहीं, कुछ नियम प्राप्त करें। इसके लिए, आइए आकृति 6.3 में चित्रों को देखें:



आकृति 6.2



आकृति 6.3

आप तुरंत यह कहेंगे कि ये एक ही स्मारक (ताजमहल) के चित्र हैं, परंतु ये भिन्न-भिन्न आमापों (sizes) के हैं। क्या आप यह कहेंगे कि ये चित्र समरूप हैं? हाँ, ये हैं। आप एक ही व्यक्ति के एक ही आमाप वाले उन दो चित्रों के बारे में क्या कह सकते हैं, जिनमें से एक उसकी 10 वर्ष की आयु का है तथा दूसरा उसकी 40 वर्ष की आयु का है? क्या ये दोनों चित्र समरूप हैं? ये चित्र समान आमाप के हैं, परंतु निश्चित रूप से ये समान आकार के नहीं हैं। अत:, ये समरूप नहीं हैं।

जब कोई फ़ोटोग्राफर एक ही नेगेटिव से विभिन्न मापों के फ़ोटो प्रिंट निकालती है, तो वह क्या करती है? आपने स्टैंप साइज़, पासपोर्ट साइज़ एवं पोस्ट कार्ड साइज़ फ़ोटो (या चित्रों) के बारे में अवश्य सुना होगा। वह सामान्य रूप से एक छोटे आमाप (साइज) की फ़िल्म (film), मान लीजिए जो 35 mm आमाप वाली फ़िल्म है, पर फ़ोटो खींचती है और फिर उसे एक बड़े आमाप, जैसे 45 mm (या 55 mm) आमाप, वाली फ़ोटो के रूप में आवर्धित

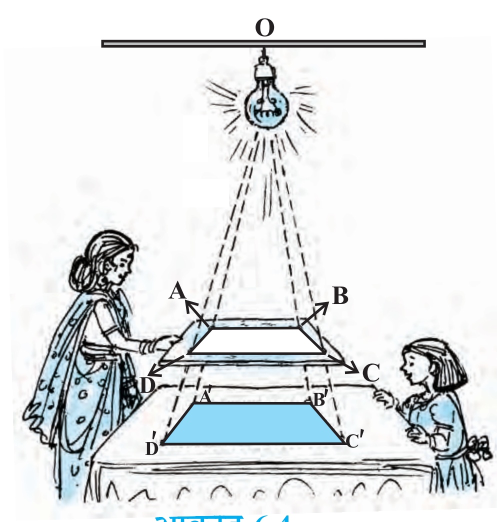
करती है। इस प्रकार, यदि हम छोटे चित्र के किसी एक रेखाखंड को लें, तो बड़े चित्र में इसका संगत रेखाखंड, लंबाई में पहले रेखाखंड का $\frac{45}{35}\left(\text{या } \frac{55}{35}\right)$ गुना होगा। वास्तव में इसका अर्थ यह है कि छोटे चित्र का प्रत्येक रेखाखंड 35:45 (या 35:55) के अनुपात में आवर्धित हो (बढ़) गया है। इसी को इस प्रकार भी कहा जा सकता है कि बड़े चित्र का प्रत्येक रेखाखंड 45:35 (या 55:35) के अनुपात में घट (कम हो) गया है। साथ ही, यदि आप विभिन्न आमापों के दो चित्रों में संगत रेखाखंडों के किसी भी युग्म के बीच बने झुकावों [अथवा कोणों] को लें, तो आप देखेंगे कि ये झुकाव (या कोण) *सदैव बराबर* होंगे। यही दो आकृतियों तथा विशेषकर दो बहुभुजों की समरूपता का सार है। हम कहते हैं कि:

भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (i) उनके संगत कोण बराबर हों तथा (ii) इनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (अर्थात् समानुपाती) हों।

ध्यान दीजिए कि बहुभुजों के लिए संगत भुजाओं के इस एक ही अनुपात को *स्केल गुणक (scale factor)* [अथवा *प्रतिनिधित्व भिन्न (Representative Fraction)*] कहा जाता है। आपने यह अवश्य सुना होगा कि विश्व मानचित्र [अर्थात् ग्लोबल मानचित्र] तथा भवनों के निर्माण के लिए बनाए जाने वाली रूप रेखा एक उपयुक्त स्केल गुणक तथा कुछ परिपाटियों को ध्यान में रखकर बनाए जाते हैं।

आकृतियों की समरूपता को अधिक स्पष्ट रूप से समझने के लिए, आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें:

क्रियाकलाप 1 : अपनी कक्षा के कमरे की छत के किसी बिंदु O पर प्रकाश युक्त बल्ब लगाइए तथा उसके ठीक नीचे एक मेज रखिए। आइए एक समतल कार्डबोर्ड में से एक बहुभुज, मान लीजिए चतुर्भुज ABCD, काट लें तथा इस कार्डबोर्ड को भूमि के समांतर मेज और जलते हुए बल्ब के बीच में रखें। तब, मेज पर ABCD की एक छाया (shadow) पड़ेगी। इस छाया की बाहरी रूपरेखा को A′B′C′D′ से चिह्नित कीजिए (देखिए आकृति 6.4)।



आकृति 6.4

ध्यान दीजिए कि चतुर्भुज A′B′C′D′ चतुर्भुज

ABCD का एक आकार परिवर्धन (या आवर्धन) है। यह प्रकाश के इस गुणधर्म के कारण है कि प्रकाश सीधी रेखा में चलती है। आप यह भी देख सकते हैं कि A′ किरण OA पर स्थित है, B′ किरण OB पर स्थित है, C′ किरण OC पर स्थित है तथा D′ किरण OD पर स्थित है। इस प्रकार, चतुर्भुज A′B′C′D′ और ABCD समान आकार के हैं; परंतु इनके माप भिन्न-भिन्न हैं।

अतः चतुर्भुज A′B′C′D′ चतुर्भुज ABCD के समरूप हैं। हम यह भी कह सकते हैं कि चतुर्भुज ABCD चतुर्भुज A′B′C′D′ के समरूप हैं।

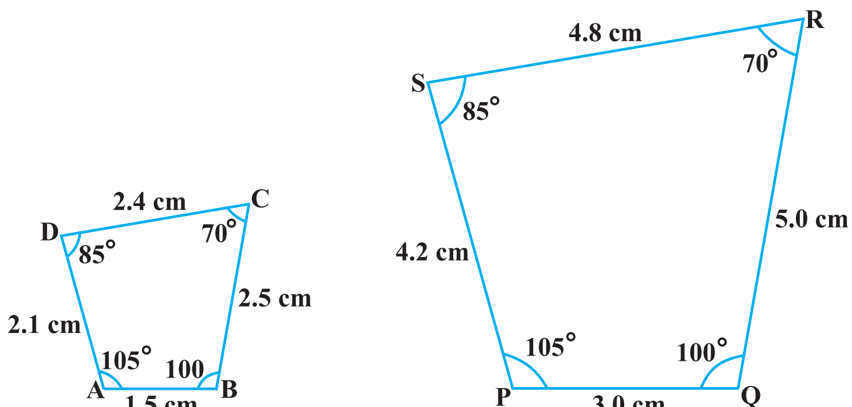
यहाँ, आप यह भी देख सकते हैं कि शीर्ष A′ शीर्ष A के संगत है, शीर्ष B′ शीर्ष B के संगत है, शीर्ष C′ शीर्ष C के संगत है तथा शीर्ष D′ शीर्ष D के संगत है। सांकेतिक रूप से इन संगतताओं (correspondences) को $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ और $D' \leftrightarrow D$ से निरूपित किया जाता है। दोनों चतुर्भुजों के कोणों और भुजाओं को वास्तविक रूप से माप कर, आप इसका सत्यापन कर सकते हैं कि

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ और

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$.

इससे पुनः यह बात स्पष्ट होती है कि *भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (i) उनके सभी संगत कोण बराबर हों तथा (ii) उनकी सभी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात (समानुपात) में हों।*

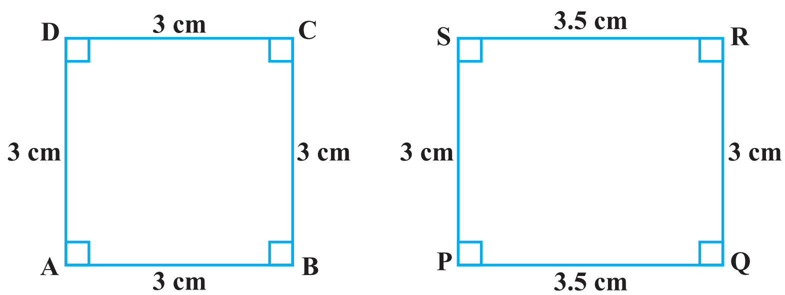
उपरोक्त के आधार पर, आप सरलता से यह कह सकते हैं कि आकृति 6.5 में दिए गए चतुर्भुज ABCD और PQRS समरूप हैं।



आकृति 6.5

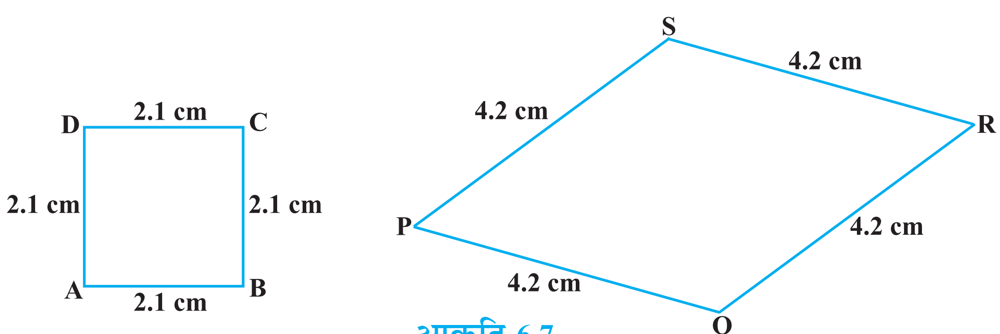
टिप्पणी : आप इसका सत्यापन कर सकते हैं कि यदि एक बहुभुज किसी अन्य बहुभुज के समरूप हो और यह दूसरा बहुभुज एक तीसरे बहुभुज के समरूप हो, तो पहला बहुभुज तीसरे बहुभुज के समरूप होगा।

आप यह देख सकते हैं कि आकृति 6.6 के दो चतुर्भुजों (एक वर्ग और एक आयत) में, संगत कोण बराबर हैं, परंतु इनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में नहीं हैं। अतः, ये दोनों चतुर्भुज समरूप नहीं हैं।



आकृति 6.6

इसी प्रकार आप देख सकते हैं कि आकृति 6.7 के दो चतुर्भुजों (एक वर्ग और एक समचतुर्भुज) में, संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में हैं, परंतु इनके संगत कोण बराबर नहीं हैं। पुनः, दोनों बहुभुज (चतुर्भुज) समरूप नहीं हैं।



आकृति 6.7

इस प्रकार, आप देख सकते हैं कि दो बहुभुजों की समरूपता के प्रतिबंधों (*i*) *और* (*ii*) *में से किसी एक का ही संतुष्ट होना उनकी समरूपता के लिए पर्याप्त नहीं है।*

प्रश्नावली 6.1

1. कोष्ठकों में दिए शब्दों में से सही शब्दों का प्रयोग करते हुए, रिक्त स्थानों को भरिए:

(i) सभी वृत्त ———— होते हैं। (सर्वांगसम, समरूप)

(ii) सभी वर्ग ———— होते हैं। (समरूप, सर्वांगसम)

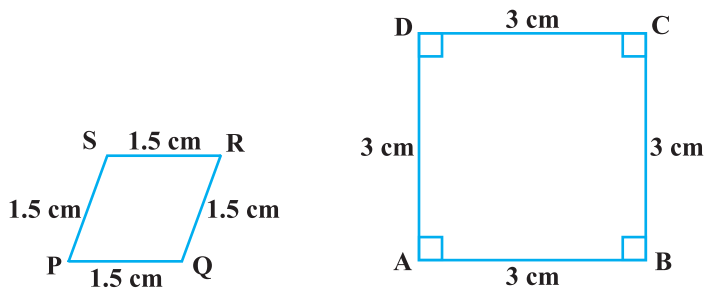
(iii) सभी ———— त्रिभुज समरूप होते हैं। (समद्विबाहु, समबाहु)

(iv) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (i) उनके संगत कोण ———— हों तथा (ii) उनकी संगत भुजाएँ ———— हों। (बराबर, समानुपाती)

2. निम्नलिखित युग्मों के दो भिन्न-भिन्न उदाहरण दीजिए:

(i) समरूप आकृतियाँ (ii) ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं।

3. बताइए कि निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप हैं या नहीं:



आकृति 6.8

6.3 त्रिभुजों की समरूपता

आप दो त्रिभुजों की समरूपता के बारे में क्या कह सकते हैं?

आपको याद होगा कि त्रिभुज भी एक बहुभुज ही है। इसलिए,हम त्रिभुजों की समरूपता के लिए भी वही प्रतिबंध लिख सकते हैं, जो बहुभुजों की समरूपता के लिए लिखे थे। अर्थात्

दो त्रिभुज समरूप होते हैं, यदि

(i) उनके संगत कोण बराबर हों तथा

(ii) उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (अर्थात् समानुपाती) हों।

ध्यान दीजिए कि यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों, तो वे *समानकोणिक त्रिभुज* (equiangular triangles) कहलाते हैं। एक प्रसिद्ध यूनानी गणितज्ञ थेल्स (Thales) ने दो समानकोणिक त्रिभुजों से संबंधित एक महत्वपूर्ण तथ्य प्रतिपादित किया, जो नीचे दिया जा रहा है:

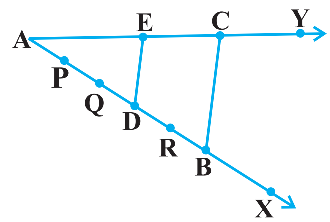
थेल्स
(ई.पू. 640 – 546)

दो समानकोणिक त्रिभुजों में उनकी संगत भुजाओं का अनुपात सदैव समान रहता है।

ऐसा विश्वास किया जाता है कि इसके लिए उन्होंने एक परिणाम का प्रयोग किया जिसे आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (आजकल थेल्स प्रमेय) कहा जाता है।

आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (Basic Proportionality Theorem) को समझने के लिए, आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें:

क्रियाकलाप 2 : कोई कोण XAY खींचिए तथा उसकी एक भुजा AX पर कुछ बिंदु (मान लीजिए पाँच बिंदु) P, Q, D, R और B इस प्रकार अंकित कीजिए कि AP = PQ = QD = DR = RB हो।



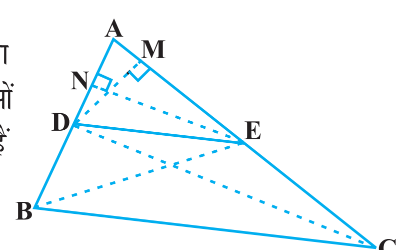
आकृति 6.9

अब, बिंदु B से होती हुई कोई एक रेखा खींचिए, जो भुजा AY को बिंदु C पर काटे (देखिए आकृति 6.9)।

साथ ही, बिंदु D से होकर BC के समांतर एक रेखा खींचिए, जो AC को E पर काटे। क्या आप अपनी रचनाओं से यह देखते हैं कि $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$ हैं? AE और EC मापिए। $\frac{AE}{EC}$ क्या है? देखिए $\frac{AE}{EC}$ भी $\frac{3}{2}$ के बराबर है। इस प्रकार, आप देख सकते हैं कि त्रिभुज ABC में, $DE \parallel BC$ है तथा $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ है। क्या यह संयोगवश है? नहीं, यह निम्नलिखित प्रमेय के कारण है (जिसे आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय कहा जाता है):

प्रमेय 6.1 : *यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।*

उपपत्ति : हमें एक त्रिभुज ABC दिया है, जिसमें भुजा BC के समांतर खींची गई एक रेखा अन्य दो भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर काटती हैं (देखिए आकृति 6.10)।



आकृति 6.10

हमें सिद्ध करना है कि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

आइए B और E तथा C और D को मिलाएँ और फिर $DM \perp AC$ एवं $EN \perp AB$ खीचें।

अब, Δ ADE का क्षेत्रफल (= $\frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई) = $\frac{1}{2}$ AD × EN

कक्षा IX से याद कीजिए कि Δ ADE के क्षेत्रफल को ar (ADE) से व्यक्त किया जाता है।

अत: $$\text{ar(ADE)} = \frac{1}{2}\text{ AD} \times \text{EN}$$

इसी प्रकार $$\text{ar (BDE)} = \frac{1}{2}\text{ DB} \times \text{EN},$$

$$\text{ar (ADE)} = \frac{1}{2}\text{ AE} \times \text{DM} \text{ तथा ar(DEC)} = \frac{1}{2}\text{ EC} \times \text{DM}$$

अत: $$\frac{\text{ar(ADE)}}{\text{ar(BDE)}} = \frac{\frac{1}{2}\text{ AD} \times \text{EN}}{\frac{1}{2}\text{ DB} \times \text{EN}} = \frac{\text{AD}}{\text{DB}} \quad (1)$$

तथा $$\frac{\text{ar(ADE)}}{\text{ar(DEC)}} = \frac{\frac{1}{2}\text{ AE} \times \text{DM}}{\frac{1}{2}\text{ EC} \times \text{DM}} = \frac{\text{AE}}{\text{EC}} \quad (2)$$

ध्यान दीजिए कि Δ BDE और Δ DEC एक ही आधार DE तथा समांतर रेखाओं BC और DE के बीच बने दो त्रिभुज हैं।

अत: $$\text{ar(BDE)} = \text{ar(DEC)} \quad (3)$$

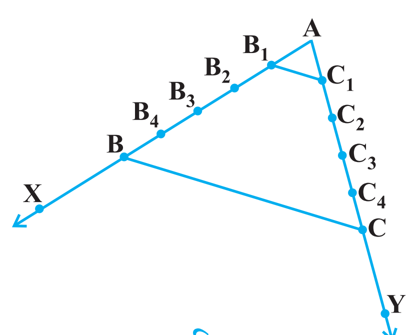
इसलिए (1), (2) और (3), से हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{\text{AD}}{\text{DB}} = \frac{\text{AE}}{\text{EC}}$$ ■

क्या इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है (विलोम के अर्थ के लिए परिशिष्ट 1 देखिए)? इसकी जाँच करने के लिए, आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें:

क्रियाकलाप 3 : अपनी अभ्यासपुस्तिका में एक कोण XAY खींचिए तथा किरण AX पर बिंदु B_1, B_2, B_3, B_4 और B इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$ हो।

इसी प्रकार, किरण AY, पर बिंदु C_1, C_2, C_3, C_4 और C इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$ हो। फिर B_1C_1 और BC को मिलाइए (देखिए आकृति 6.11)।



आकृति 6.11

ध्यान दीजिए कि $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (प्रत्येक $\frac{1}{4}$ के बराबर है)

आप यह भी देख सकते हैं कि रेखाएँ B_1C_1 और BC परस्पर समांतर हैं, अर्थात्

$$B_1C_1 \parallel BC \quad (1)$$

इसी प्रकार, क्रमश: B_2C_2, B_3C_3 और B_4C_4 को मिलाकर आप देख सकते हैं कि

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} \left(= \frac{2}{3}\right) \text{ और } B_2C_2 \parallel BC \quad (2)$$

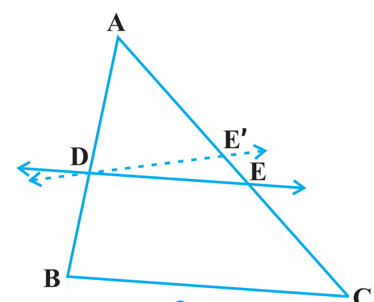
$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} \left(= \frac{3}{2}\right) \text{ और } B_3C_3 \parallel BC, \quad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} \left(= \frac{4}{1}\right) \text{ और } B_4C_4 \parallel BC \quad (4)$$

(1), (2), (3) और (4) से, यह देखा जा सकता है कि यदि कोई रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो वह रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती हैं।

आप किसी अन्य माप का कोण XAY खींचकर तथा भुजाओं AX और AY पर कितने भी समान भाग अंकित कर, इस क्रियाकलाप को दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार, आप एक ही परिणाम पर पहुँचेंगे। इस प्रकार, हम निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त करते हैं, जो प्रमेय 6.1 का विलोम है:

प्रमेय 6.2 : *यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो वह तीसरी भुजा के समांतर होती है।*



आकृति 6.12

इस प्रमेय को सिद्ध किया जा सकता है, यदि हम एक रेखा DE इस प्रकार लें कि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ हो तथा DE भुजा BC के समांतर न हो (देखिए आकृति 6.12)।

अब यदि DE भुजा BC के समांतर नहीं है, तो BC के समांतर एक रेखा DE′ खींचिए।

अत: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (क्यों?)

इसलिए $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (क्यों?)

उपरोक्त के दोनों पक्षों में 1 जोड़ कर, आप यह देख सकते हैं कि E और E′ को अवश्य ही संपाती होना चाहिए (क्यों?)। उपरोक्त प्रमेयों का प्रयोग स्पष्ट करने के लिए आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : यदि कोई रेखा एक Δ ABC की भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करे तथा भुजा BC के समांतर हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ होगा (देखिए आकृति 6.13)।

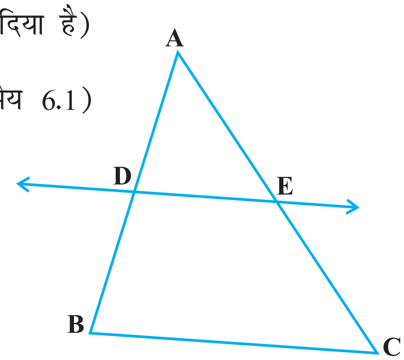
हल : DE ∥ BC (दिया है)

अतः $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (प्रमेय 6.1)

अर्थात् $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

या $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

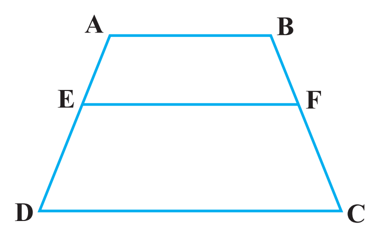
या $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$



आकृति 6.13

अतः $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

उदाहरण 2 : ABCD एक समलंब है जिसमें AB ∥ DC है। असमांतर भुजाओं AD और BC पर क्रमशः बिंदु E और F इस प्रकार स्थित हैं कि EF भुजा AB के समांतर है (देखिए आकृति 6.14)। दर्शाइए कि $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ है।

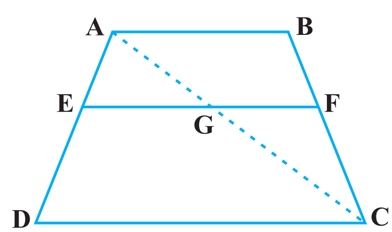


आकृति 6.14

हल : आइए A और C को मिलाएँ जो EF को G पर प्रतिच्छेद करे (देखिए आकृति 6.15)।

AB ∥ DC और EF ∥ AB (दिया है)

इसलिए EF ∥ DC (एक ही रेखा के समांतर रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं)



आकृति 6.15

अब Δ ADC में,

EG ‖ DC (क्योंकि EF ‖ DC)

अतः $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (प्रमेय 6.1) (1)

इसी प्रकार, Δ CAB में

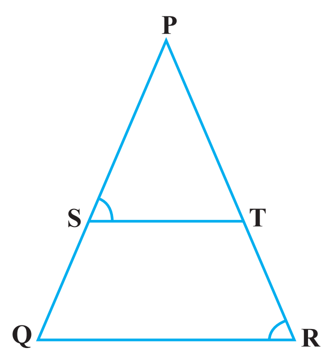
$$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$$

अर्थात् $$\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC} \quad (2)$$

अतः (1) और (2) से

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

उदाहरण 3 : आकृति 6.16 में $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ है तथा $\angle$ PST = $\angle$ PRQ है। सिद्ध कीजिए कि ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



आकृति 6.16

हल : यह दिया है कि, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

अतः ST ‖ QR (प्रमेय 6.2)

इसलिए $\angle$ PST = $\angle$ PQR (संगत कोण) (1)

साथ ही यह दिया है कि

$$\angle PST = \angle PRQ \quad (2)$$

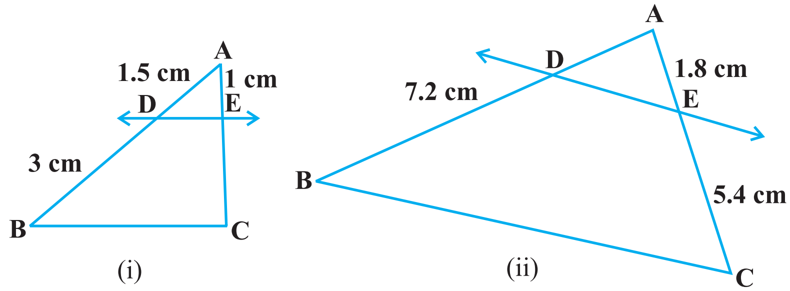
अतः $\angle$ PRQ = $\angle$ PQR [(1) और (2) से]

इसलिए PQ = PR (समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ)

अर्थात् ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रश्नावली 6.2

1. आकृति 6.17 (i) और (ii) में, DE ‖ BC है। (i) में EC और (ii) में AD ज्ञात कीजिए:



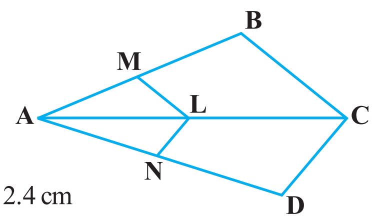
आकृति 6.17

2. किसी Δ PQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिंदु E और F स्थित हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए, बताइए कि क्या EF ‖ QR है:

(i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm और FR = 2.4 cm

(ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm और RF = 9 cm

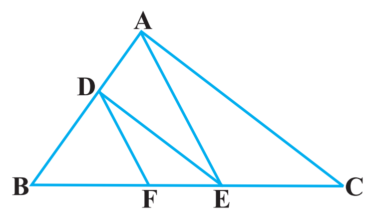
(iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm और PF = 0.36 cm



आकृति 6.18

3. आकृति 6.18 में यदि LM ‖ CB और LN ‖ CD हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ है।

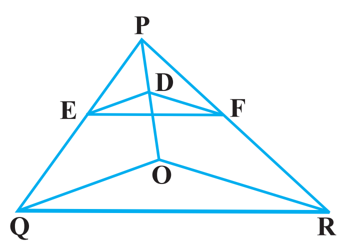
4. आकृति 6.19 में DE ‖ AC और DF ‖ AE है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है।



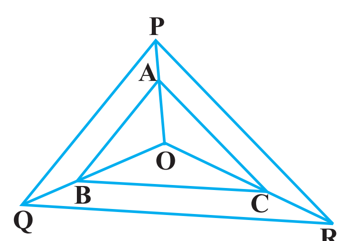
आकृति 6.19

5. आकृति 6.20 में DE ‖ OQ और DF ‖ OR है। दर्शाइए कि EF ‖ QR है।

6. आकृति 6.21 में क्रमशः OP, OQ और OR पर स्थित बिंदु A, B और C इस प्रकार हैं कि AB ‖ PQ और AC ‖ PR है। दर्शाइए कि BC ‖ QR है।



आकृति 6.20



आकृति 6.21

7. प्रमेय 6.1 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिंदु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है। (याद कीजिए कि आप इसे कक्षा IX में सिद्ध कर चुके हैं।)

8. प्रमेय 6.2 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है। (याद कीजिए कि आप कक्षा IX में ऐसा कर चुके हैं)।

9. ABCD एक समलंब है जिसमें AB || DC है तथा इसके विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।

10. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है। दर्शाइए कि ABCD एक समलंब है।

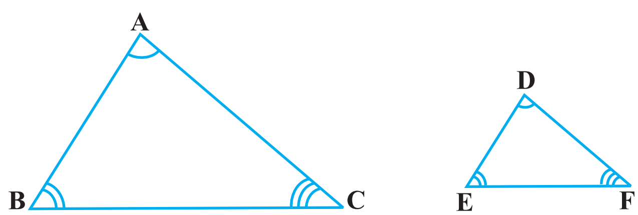
6.4 त्रिभुजों की समरूपता के लिए कसौटियाँ

पिछले अनुच्छेद में हमने कहा था कि दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि (i) उनके संगत कोण बराबर हों तथा (ii) उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती हों)। अर्थात्

यदि Δ ABC और Δ DEF में,

(i) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ है तथा

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ है तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं (देखिए आकृति 6.22)।



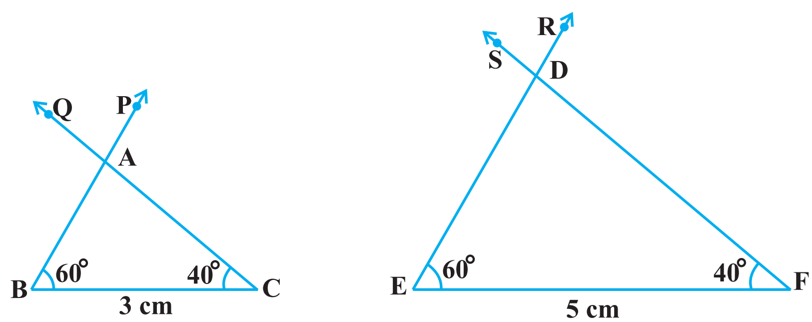
आकृति 6.22

यहाँ आप देख सकते हैं कि A, D के संगत है; B, E के संगत है तथा C, F के संगत है। सांकेतिक रूप से, हम इन त्रिभुजों की समरूपता को '$\Delta ABC \sim \Delta DEF$' लिखते हैं तथा 'त्रिभुज ABC समरूप है त्रिभुज DEF के' पढ़ते हैं। संकेत '~' 'समरूप' को प्रकट करता है। याद कीजिए कि कक्षा IX में आपने 'सर्वांगसम' के लिए संकेत '≅' का प्रयोग किया था।

इस बात पर अवश्य ध्यान देना चाहिए कि जैसा त्रिभुजों की सर्वांगसमता की स्थिति में किया गया था त्रिभुजों की समरूपता को भी सांकेतिक रूप से व्यक्त करने के लिए, उनके शीर्षों की संगतताओं को सही क्रम में लिखा जाना चाहिए। उदाहरणार्थ, आकृति 6.22 के त्रिभुजों ABC और DEF के लिए, हम Δ ABC ~ Δ EDF अथवा Δ ABC ~ Δ FED नहीं लिख सकते। परंतु हम Δ BAC ~ Δ EDF लिख सकते हैं।

अब एक प्रश्न यह उठता है: दो त्रिभुजों, मान लीजिए ABC और DEF की समरूपता की जाँच के लिए क्या हम सदैव उनके संगत कोणों के सभी युग्मों की समानता ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$) तथा उनकी संगत भुजाओं के सभी युग्मों के अनुपातों की समानता $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$ पर विचार करते हैं? आइए इसकी जाँच करें। आपको याद होगा कि कक्षा IX में, आपने दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ ऐसी कसौटियाँ (criteria) प्राप्त की थीं जिनमें दोनों त्रिभुजों के संगत भागों (या अवयवों) के केवल तीन युग्म ही निहित थे। यहाँ भी, आइए हम दो त्रिभुजों की समरूपता के लिए, कुछ ऐसी कसौटियाँ प्राप्त करने का प्रयत्न करें, जिनमें इन दोनों त्रिभुजों के संगत भागों के सभी छः युग्मों के स्थान पर, इन संगत भागों केक्म युग्मों के बीच संबंध ही निहित हों। इसके लिए, आइए निम्नलिखित क्रियाकलाप करें:

क्रियाकलाप 4 : भिन्न-भिन्न लंबाइयों, मान लीजिए 3 cm और 5 cm वाले क्रमशः दो रेखाखंड BC और EF खींचिए। फिर बिंदुओं B और C पर क्रमशः $\angle PBC$ और $\angle QCB$ किन्हीं दो मापों, मान लीजिए $60°$ और $40°$, के खींचिए। साथ ही, बिंदुओं E और F पर क्रमशः $\angle REF = 60°$ और $\angle SFE = 40°$ खींचिए (देखिए आकृति 6.23)।



आकृति 6.23

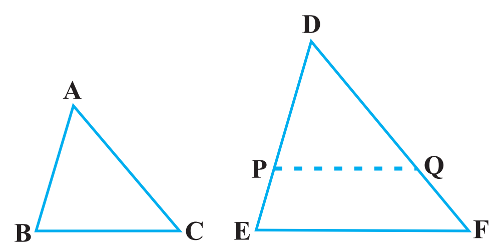
मान लीजिए किरण BP और CQ परस्पर बिंदु A पर प्रतिच्छेद करती हैं तथा किरण ER और FS परस्पर बिंदु D पर प्रतिच्छेद करती हैं। इन दोनों त्रिभुजों ABC और DEF में, आप देख सकते हैं कि $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ और $\angle A = \angle D$ है। अर्थात् इन त्रिभुजों के संगत कोण बराबर

हैं। इनकी संगत भुजाओं के बारे में आप क्या कह सकते हैं? ध्यान दीजिए कि $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$ है। $\frac{AB}{DE}$ और $\frac{CA}{FD}$ के बारे में आप क्या कह सकते हैं? AB, DE, CA और FD को मापने पर, आप पाएँगे कि $\frac{AB}{DE}$ और $\frac{CA}{FD}$ भी 0.6 के बराबर है (अथवा लगभग 0.6 के बराबर हैं, यदि मापन में कोई त्रुटि है)। इस प्रकार, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ है। आप समान संगत कोण वाले त्रिभुजों के अनेक युग्म खींचकर इस क्रियाकलाप को दुहरा सकते हैं। प्रत्येक बार, आप यह पाएँगे कि उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) हैं। यह क्रियाकलाप हमें दो त्रिभुजों की समरूपता की निम्नलिखित कसौटी की ओर अग्रसित करता है:

प्रमेय 6.3 : *यदि दो त्रिभुजों में, संगत कोण बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) होती हैं और इसीलिए ये त्रिभुज समरूप होते हैं।*

उपरोक्त कसौटी को दो त्रिभुजों की *समरूपता की* AAA (कोण-कोण-कोण) कसौटी कहा जाता है।

इस प्रमेय को दो ऐसे त्रिभुज ABC और DEF लेकर, जिनमें $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ हो, सिद्ध किया जा सकता है (देखिए आकृति 6.24)।



आकृति 6.24

DP = AB और DQ = AC काटिए तथा P और Q को मिलाइए।

अत: $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (क्यों?)

इससे $\angle B = \angle P = \angle E$ और $PQ \parallel EF$ प्राप्त होता है (कैसे?)

अत: $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (क्यों?)

अर्थात् $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (क्यों?)

इसी प्रकार, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ और इसीलिए $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

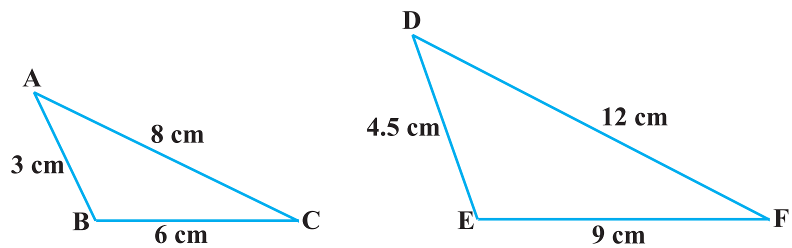
टिप्पणी : यदि एक त्रिभुज के दो कोण किसी अन्य त्रिभुज के दो कोणों के क्रमश: बराबर हों, तो त्रिभुज के कोण योग गुणधर्म के कारण, इनके तीसरे कोण भी बराबर होंगे। इसीलिए, AAA समरूपता कसौटी को निम्नलिखित रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है:

यदि एक त्रिभुज के दो कोण एक अन्य त्रिभुज के क्रमशः दो कोणों के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

उपरोक्त को दो त्रिभुजों की *समरूपता की* AA *कसौटी* कहा जाता है।

ऊपर आपने देखा है कि यदि एक त्रिभुज के तीनों कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज के तीनों कोणों के बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती (एक ही अनुपात में) होती हैं। इस कथन के विलोम के बारे में क्या कह सकते हैं? क्या यह विलोम सत्य है? दूसरे शब्दों में, यदि एक त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः दूसरे त्रिभुज की भुजाओं के समानुपाती हों, तो क्या यह सत्य है कि इन त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हैं? आइए, एक क्रियाकलाप द्वारा जाँच करें।

क्रियाकलाप 5 : दो त्रिभुज ABC और DEF इस प्रकार खींचिए कि AB = 3 cm, BC = 6 cm, CA = 8 cm, DE = 4.5 cm, EF = 9 cm और FD = 12 cm हो (देखिए आकृति 6.25)।



आकृति 6.25

तब, आपको प्राप्त है: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (प्रत्येक $\frac{2}{3}$ के बराबर हैं)

अब, $\angle$ A, $\angle$ B, $\angle$ C, $\angle$ D, $\angle$ E और $\angle$ F को मापिए। आप देखेंगे कि $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ है, अर्थात् दोनों त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हैं।

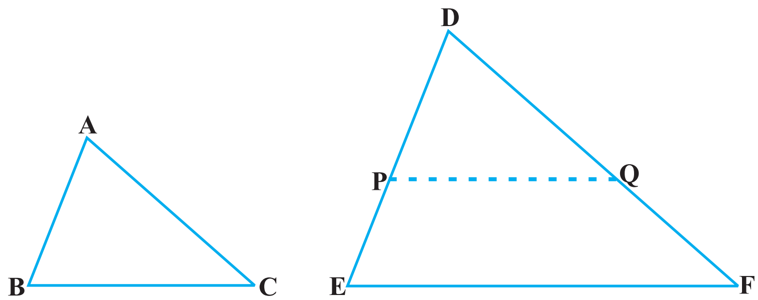
इसी प्रकार के अनेक त्रिभुजों के युग्म खींचकर (जिनमें संगत भुजाओं के अनुपात एक ही हों), आप इस क्रियाकलाप को पुनः कर सकते हैं। प्रत्येक बार आप यह पाएँगे कि इन त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हैं। यह दो त्रिभुजों की समरूपता की निम्नलिखित कसौटी के कारण हैं:

प्रमेय 6.4 : *यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की भुजाओं के समानुपाती (अर्थात् एक ही अनुपात में) हों, तो इनके संगत कोण बराबर होते हैं, और इसीलिए दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।*

इस कसौटी को दो त्रिभुजों की *समरूपता* की SSS (भुजा-भुजा-भुजा) *कसौटी* कहा जाता है।

उपरोक्त प्रमेय को ऐसे दो त्रिभुज ABC और DEF लेकर, जिनमें $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ हो, सिद्ध किया जा सकता है (देखिए आकृति 6.26):

Δ DEF में DP = AB और DQ = AC काटिए तथा P और Q को मिलाइए।



आकृति 6.26

यहाँ यह देखा जा सकता है कि $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ और PQ || EF है (कैसे?)

अत: $\angle P = \angle E$ और $\angle Q = \angle F$.

इसलिए $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

जिससे $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (क्यों?)

अत: BC = PQ (क्यों?)

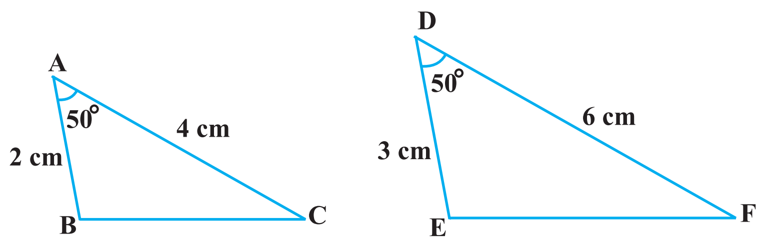
इस प्रकार $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (क्यों?)

अत: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ (कैसे?)

टिप्पणी : आपको याद होगा कि दो बहुभुजों की समरूपता के दोनों प्रतिबंधों, अर्थात् (i) संगत कोण बराबर हों और (ii) संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में हों, में से केवल किसी एक का ही संतुष्ट होना उनकी समरूपता के लिए पर्याप्त नहीं होता। परंतु प्रमेयों 6.3 और 6.4 के आधार पर, अब आप यह कह सकते हैं कि दो त्रिभुजों की समरूपता की स्थिति में, इन दोनों प्रतिबंधों की जाँच करने की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि एक प्रतिबंध से स्वत: ही दूसरा प्रतिबंध प्राप्त हो जाता है।

आइए अब दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की उन कसौटियों को याद करें, जो हमने कक्षा IX में पढ़ी थीं। आप देख सकते हैं कि SSS समरूपता कसौटी की तुलना SSS सर्वांगसमता कसौटी से की जा सकती है। इससे हमें यह संकेत मिलता है कि त्रिभुजों की समरूपता की ऐसी कसौटी प्राप्त करने का प्रयत्न किया जाए जिसकी त्रिभुजों की SAS सर्वांगसमता कसौटी से तुलना की जा सके। इसके लिए, आइए एक क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 6 : दो त्रिभुज ABC और DEF इस प्रकार खींचिए कि AB = 2 cm, $\angle A = 50^\circ$, AC = 4 cm, DE = 3 cm, $\angle D = 50^\circ$ और DF = 6 cm हो (देखिए आकृति 6.27)।



आकृति 6.27

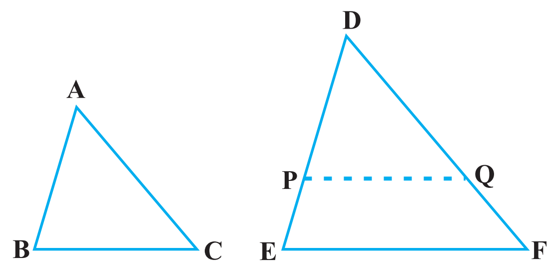
यहाँ, आप देख सकते हैं कि $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (प्रत्येक $\frac{2}{3}$ के बराबर हैं) तथा $\angle A$ (भुजाओं AB और AC के अंतर्गत कोण) = $\angle D$ (भुजाओं DE और DF के अंतर्गत कोण) है। अर्थात् एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर है तथा इन कोणों को अंतर्गत करने वाली भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) हैं। अब, आइए $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$ और $\angle F$ को मापें।

आप पाएँगे कि $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ है। अर्थात्, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ है। इसलिए, AAA समरूपता कसौटी से $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है। आप ऐसे अनेक त्रिभुजों के युग्मों को खींचकर, जिनमें एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों को अंतर्गत करने वाली भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) हों, इस क्रियाकलाप को दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार, आप यह पाएँगे कि दोनों त्रिभुज समरूप हैं। यह त्रिभुजों की समरूपता की निम्नलिखित कसौटी के कारण हैं:

प्रमेय 6.5 : *यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों को अंतर्गत करने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।*

इस कसौटी को दो त्रिभुजों की *समरूपता की SAS* (भुजा-कोण-भुजा) *कसौटी* कहा जाता है।

पहले की ही तरह, इस प्रमेय को भी दो त्रिभुज ABC और DEF ऐसे लेकर कि $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) हो तथा $\angle A = \angle D$ हो (देखिए आकृति 6.28) तो सिद्ध किया जा सकता है। Δ DEF में DP = AB और DQ = AC काटिए तथा P और Q को मिलाइए।



आकृति 6.28

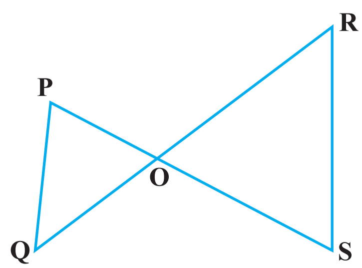
अब $PQ \parallel EF$ और $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (कैसे?)

अत: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$ और $\angle C = \angle Q$ है

इसलिए $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (क्यों?)

आइए अब हम इन कसौटियों के प्रयोग को प्रदर्शित करने के लिए, कुछ उदाहरण लें।

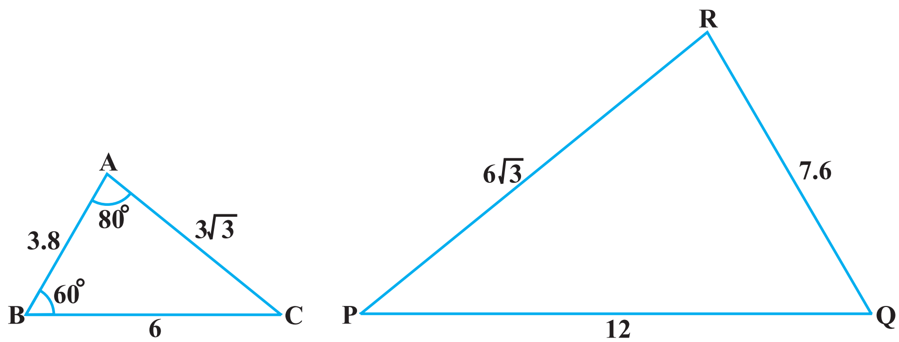
उदाहरण 4 : आकृति 6.29 में, यदि $PQ \parallel RS$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ है।



आकृति 6.29

हल :	$PQ \parallel RS$	(दिया है)
अत:	$\angle P = \angle S$	(एकांतर कोण)
और	$\angle Q = \angle R$	(एकांतर कोण)
साथ ही	$\angle POQ = \angle SOR$	(शीर्षाभिमुख कोण)
इसलिए	$\Delta POQ \sim \Delta SOR$	(AAA समरूपता कसौटी)

उदाहरण 5 : आकृति 6.30 में $\angle P$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.30

हल : ΔABC और Δ PQR में,

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ और } \frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

अर्थात् $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

इसलिए $\Delta ABC \sim \Delta RQP$ (SSS समरूपता)

इसलिए $\angle C = \angle P$ (समरूप त्रिभुजों के संगत कोण)

परंतु $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$ (त्रिभुज का कोण योग गुणधर्म)

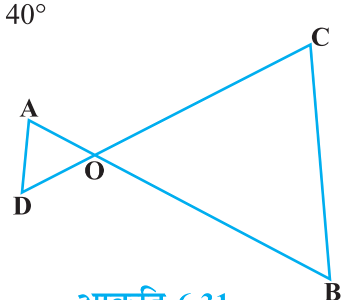
$= 180° - 80° - 60° = 40°$

अत: $\angle P = 40°$

उदाहरण 6 : आकृति 6.31 में,

OA . OB = OC . OD है।

दर्शाइए कि $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ है।



आकृति 6.31

हल : OA . OB = OC . OD (दिया है)

अत: $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

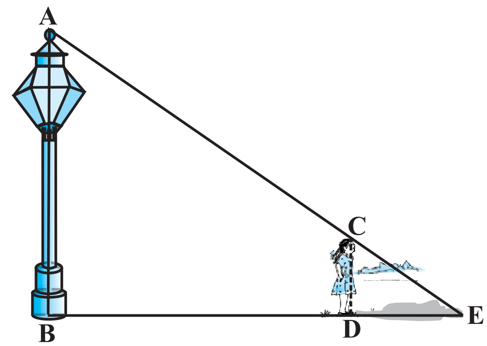
साथ ही, हमें प्राप्त है: $\angle AOD = \angle COB$ (शीर्षाभिमुख कोण) (2)

अत: (1) और (2) से $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (SAS समरूपता कसौटी)

इसलिए $\angle A = \angle C$ और $\angle D = \angle B$ (समरूप त्रिभुजों के संगत कोण)

उदाहरण 7 : 90 cm की लंबाई वाली एक लड़की बल्ब लगे एक खंभे के आधार से परे 1.2 m/s की चाल से चल रही है। यदि बल्ब भूमि से 3.6cm की ऊँचाई पर है, तो 4 सेकंड बाद उस लड़की की छाया की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए AB बल्ब लगे खंभे को तथा CD लड़की द्वारा खंभे के आधार से परे 4 सेकंड चलने के बाद उसकी स्थिति को प्रकट करते हैं (देखिए आकृति 6.32)।



आकृति 6.32

आकृति से आप देख सकते हैं कि DE लड़की की छाया की लंबाई है। मान लीजिए DE, x m है।

अब, BD = 1.2 m × 4 = 4.8 m

ध्यान दीजिए कि Δ ABE और Δ CDE में,

$\angle B = \angle D$ (प्रत्येक 90° का है, क्योंकि बल्ब लगा खंभा और लड़की दोनों ही भूमि से ऊर्ध्वाधर खड़े हैं)

तथा $\angle E = \angle E$ (समान कोण)

अत: $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (AA समरूपता कसौटी)

इसलिए $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$ (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएं)

अर्थात् $\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ $\left(90 \text{ cm} = \frac{90}{100} \text{ m} = 0.9 \text{ m}\right)$

अर्थात् $4.8 + x = 4x$

अर्थात् $3x = 4.8$

अर्थात् $x = 1.6$

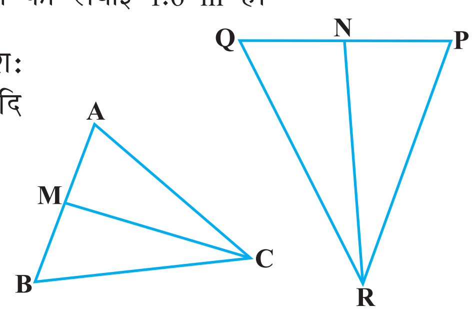
अत: 4 सेकंड चलने के बाद लड़की की छाया की लंबाई 1.6 m है।

उदाहरण 8 : आकृति 6.33 में CM और RN क्रमश: Δ ABC और Δ PQR की माध्यिकाएँ हैं। यदि Δ ABC ~ Δ PQR है तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$



आकृति 6.33

हल : (i) $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$ (दिया है)

अतः $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$ (1)

तथा $\angle A = \angle P,\ \angle B = \angle Q$ और $\angle C = \angle R$ (2)

परंतु $AB = 2\,AM$ और $PQ = 2\,PN$

(क्योंकि CM और RN माध्यिकाएँ हैं)

इसलिए (1) से $\dfrac{2\,AM}{2\,PN} = \dfrac{CA}{RP}$

अर्थात् $\dfrac{AM}{PN} = \dfrac{CA}{RP}$ (3)

साथ ही $\angle MAC = \angle NPR$ [(2) से] (4)

इसलिए (3) और (4) से,

$\Delta\, AMC \sim \Delta\, PNR$ (SAS समरूपता) (5)

(ii) (5) से $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{CA}{RP}$ (6)

परंतु $\dfrac{CA}{RP} = \dfrac{AB}{PQ}$ [(1) से] (7)

अतः $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{AB}{PQ}$ [(6) और (7) से] (8)

(iii) पुनः $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR}$ [(1) से]

अतः $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{BC}{QR}$ [(8) से] (9)

साथ ही $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{2\,BM}{2\,QN}$

अर्थात् $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{BM}{QN}$ (10)

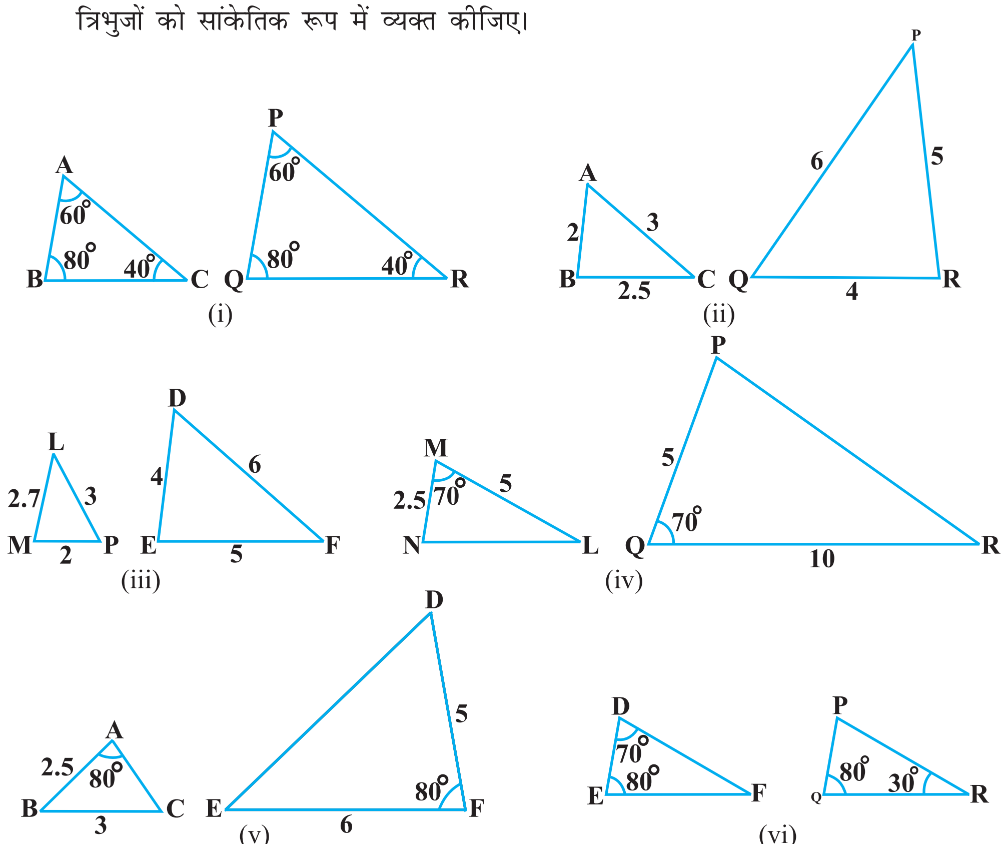
अर्थात् $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{BM}{QN}$ [(9) और (10) से]

अतः $\Delta\, CMB \sim \Delta\, RNQ$ (SSS समरूपता)

[**टिप्पणी :** आप इस प्रश्न के भाग (iii) को भाग (i) में प्रयोग की गई विधि से भी सिद्ध कर सकते हैं।]

प्रश्नावली 6.3

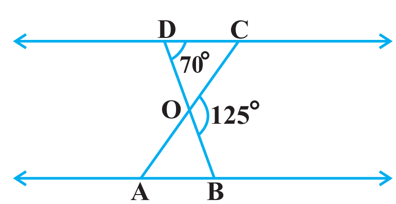
1. बताइए कि आकृति 6.34 में दिए त्रिभुजों के युग्मों में से कौन-कौन से युग्म समरूप हैं। उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देने में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए।



आकृति 6.34

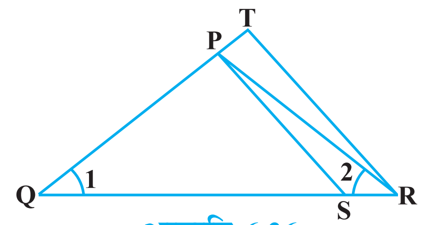
2. आकृति 6.35 में, $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125°$ और $\angle CDO = 70°$ है। $\angle DOC$, $\angle DCO$ और $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।

3. समलंब ABCD, जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ है।



आकृति 6.35

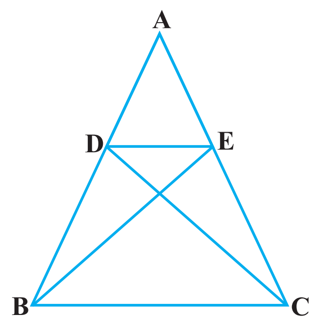
4. आकृति 6.36 में, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है। दर्शाइए कि $\Delta\, PQS \sim \Delta\, TQR$ है।



आकृति 6.36

5. $\Delta\, PQR$ की भुजाओं PR और QR पर क्रमशः बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि $\angle P = \angle RTS$ है। दर्शाइए कि $\Delta\, RPQ \sim \Delta\, RTS$ है।

6. आकृति 6.37 में, यदि $\Delta\, ABE \cong \Delta\, ACD$ है, तो दर्शाइए कि $\Delta\, ADE \sim \Delta\, ABC$ है।

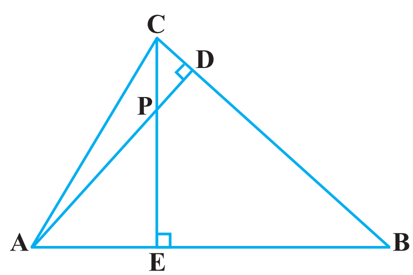


आकृति 6.37

7. आकृति 6.38 में, $\Delta\, ABC$ के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि:

(i) $\Delta\, AEP \sim \Delta\, CDP$
(ii) $\Delta\, ABD \sim \Delta\, CBE$
(iii) $\Delta\, AEP \sim \Delta\, ADB$
(iv) $\Delta\, PDC \sim \Delta\, BEC$

8. समांतर चतुर्भुज ABCD की बढ़ाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि $\Delta\, ABE \sim \Delta\, CFB$ है।

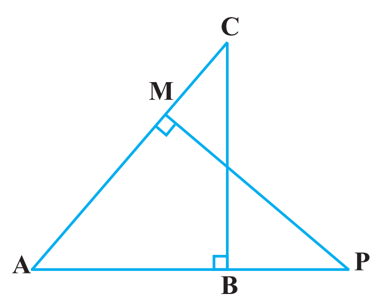


आकृति 6.38

9. आकृति 6.39 में, ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनके कोण B और M समकोण हैं। सिद्ध कीजिए कि:

(i) $\Delta\, ABC \sim \Delta\, AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$



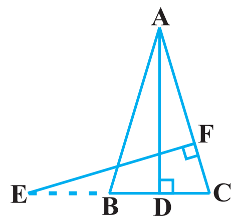
आकृति 6.39

10. CD और GH क्रमशः $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमशः ΔABC और ΔFEG की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं। यदि $\Delta\, ABC \sim \Delta\, FEG$ है, तो दर्शाइए कि:

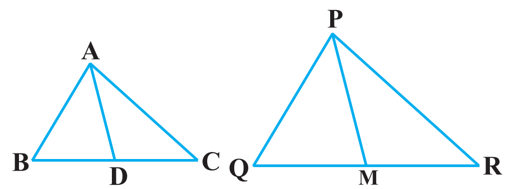
(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$
(ii) $\Delta\, DCB \sim \Delta\, HGE$
(iii) $\Delta\, DCA \sim \Delta\, HGF$

11. आकृति 6.40 में, AB = AC वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढ़ाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिंदु है। यदि $AD \perp BC$ और $EF \perp AC$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABD \sim \Delta ECF$ है।

12. एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं (देखिए आकृति 6.41)। दर्शाइए कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है।



आकृति 6.40



आकृति 6.41

13. एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है। दर्शाइए कि $CA^2 = CB.CD$ है।

14. एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और AC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज की भुजाओं PQ और PR तथा माध्यिका PM के क्रमशः समानुपाती हैं। दर्शाइए कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है।

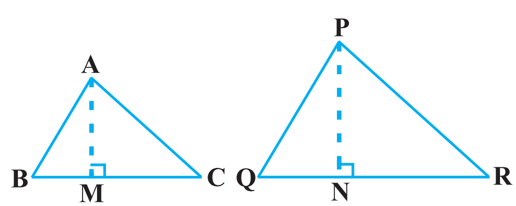
15. लंबाई 6 m वाले एक ऊर्ध्वाधर स्तंभ की भूमि पर छाया की लंबाई 4 m है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई 28 m है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

16. AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः माध्यिकाएँ हैं, जबकि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ है।

6.5 समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल

आपने यह सीखा है कि दो समरूप त्रिभुजों में, उनकी संगत भुजाओं के अनुपात एक ही (समान) रहते हैं। क्या आप सोचते हैं कि इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के अनुपात और इनकी संगत भुजाओं के अनुपात में कोई संबंध है? आप जानते हैं कि क्षेत्रफल को वर्ग मात्रकों (square units) में मापा जाता है। अतः, आप यह आशा कर सकते हैं कि क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होगा। यह वास्तव में सत्य है और इसे हम अगली प्रमेय में सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 6.6 : *दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है।*



आकृति 6.42

उपपत्ति : हमें दो त्रिभुज ABC और PQR ऐसे दिए हैं कि Δ ABC ~ Δ PQR है (देखिए आकृति 6.42)।

हमें सिद्ध करना है कि $\frac{\text{ar (ABC)}}{\text{ar (PQR)}} = \left(\frac{\text{AB}}{\text{PQ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{BC}}{\text{QR}}\right)^2 = \left(\frac{\text{CA}}{\text{RP}}\right)^2$

दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हम इनके क्रमशः शीर्षलंब AM और PN खींचते हैं।

अब $$\text{ar (ABC)} = \frac{1}{2}\text{BC} \times \text{AM}$$

तथा $$\text{ar (PQR)} = \frac{1}{2}\text{QR} \times \text{PN}$$

अतः $$\frac{\text{ar (ABC)}}{\text{ar (PQR)}} = \frac{\frac{1}{2} \times \text{BC} \times \text{AM}}{\frac{1}{2} \times \text{QR} \times \text{PN}} = \frac{\text{BC} \times \text{AM}}{\text{QR} \times \text{PN}} \quad (1)$$

अब, Δ ABM और Δ PQN में,

$\angle \text{B} = \angle \text{Q}$ (क्योंकि Δ ABC ~ Δ PQR है)

और $\angle \text{M} = \angle \text{N}$ (प्रत्येक 90° का है)

अतः Δ ABM ~ Δ PQN (AA समरूपता कसौटी)

इसलिए $$\frac{\text{AM}}{\text{PN}} = \frac{\text{AB}}{\text{PQ}} \quad (2)$$

साथ ही Δ ABC ~ Δ PQR (दिया है)

इसलिए $$\frac{\text{AB}}{\text{PQ}} = \frac{\text{BC}}{\text{QR}} = \frac{\text{CA}}{\text{RP}} \quad (3)$$

अतः $$\frac{\text{ar (ABC)}}{\text{ar (PQR)}} = \frac{\text{AB}}{\text{PQ}} \times \frac{\text{AM}}{\text{PN}} \quad \text{[(1) और (3) से]}$$

$$= \frac{\text{AB}}{\text{PQ}} \times \frac{\text{AB}}{\text{PQ}} \quad \text{[(2) से]}$$

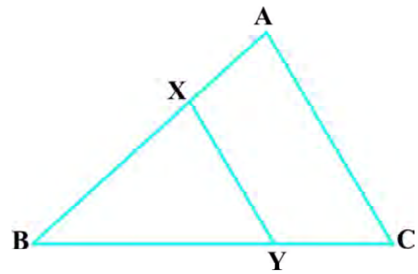
$$= \left(\frac{\text{AB}}{\text{PQ}}\right)^2$$

अब (3) का प्रयोग करके, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{ar\ (ABC)}{ar\ (PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$

आइए हम इस प्रमेय का प्रयोग दर्शाने के लिए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 9 : आकृति 6.43 में, रेखाखंड XY त्रिभुज ABC की भुजा AC के समांतर है तथा इस त्रिभुज को वह बराबर क्षेत्रफलों वाले दो भागों में विभाजित करता है। अनुपात $\frac{AX}{AB}$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.43

हल : हमें प्राप्त है: $XY \parallel AC$ (दिया है)

अत: $\angle BXY = \angle A$ और $\angle BYX = \angle C$ (संगत कोण)

इसलिए $\Delta\ ABC \sim \Delta\ XBY$ (AA समरूपता कसौटी)

अत: $$\frac{ar\ (ABC)}{ar\ (XBY)} = \left(\frac{AB}{XB}\right)^2$$ (प्रमेय 6.6) (1)

साथ ही $ar\ (ABC) = 2\ ar\ (XBY)$ (दिया है)

अत: $$\frac{ar\ (ABC)}{ar\ (XBY)} = \frac{2}{1}$$ (2)

इसलिए (1) और (2) से

$$\left(\frac{AB}{XB}\right)^2 = \frac{2}{1},\ \text{अर्थात्}\ \frac{AB}{XB} = \frac{\sqrt{2}}{1}\ \text{है।}$$

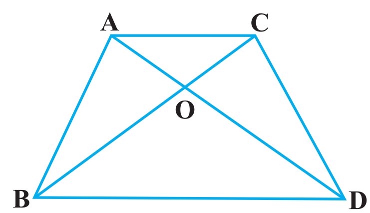
या $$\frac{XB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

या $$1 - \frac{XB}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

या $$\frac{AB - XB}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},\ \text{अर्थात्}\ \frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\ \text{है।}$$

प्रश्नावली 6.4

1. मान लीजिए $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64 cm^2 और 121 cm^2 हैं। यदि EF = 15.4 cm हो, तो BC ज्ञात कीजिए।
2. एक समलंब ABCD जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि AB = 2 CD हो तो त्रिभुजों AOB और COD के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
3. आकृति 6.44 में एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC और DBC बने हुए हैं। यदि AD, BC को O पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि $\frac{\text{ar (ABC)}}{\text{ar (DBC)}} = \frac{AO}{DO}$ है।



आकृति 6.44

4. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
5. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC और CA के मध्य-बिंदु क्रमशः D, E और F हैं। ΔDEF और ΔABC के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
6. सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत माध्यिकाओं के अनुपात का वर्ग होता है।
7. सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग की किसी भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

सही उत्तर चुनिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए:

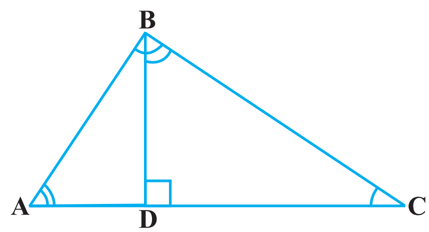
8. ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य-बिंदु है। त्रिभुजों ABC और BDE के क्षेत्रफलों का अनुपात है:
   (A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 4 : 1 (D) 1 : 4
9. दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4 : 9 के अनुपात में हैं। इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात है:
   (A) 2 : 3 (B) 4 : 9 (C) 81 : 16 (D) 16 : 81

6.6 पाइथागोरस प्रमेय

पिछली कक्षाओं में, आप पाइथागोरस प्रमेय से भली-भाँति परिचित हो चुके हैं। आपने कुछ क्रियाकलापों द्वारा इस प्रमेय की जाँच की थी तथा इसके आधार पर कुछ प्रश्न हल किए थे। आपने कक्षा IX में, इसकी एक उपपत्ति भी देखी थी। अब, हम इस प्रमेय को त्रिभुजों की समरूपता की अवधारणा का प्रयोग करके सिद्ध करेंगे। इसे सिद्ध करने के लिए हम एक समकोण त्रिभुज के कर्ण पर सम्मुख शीर्ष से डाले गए लंब के

दोनों ओर बने समरूप त्रिभुजों से संबंधित एक परिणाम का प्रयोग करेंगे।

अब, आइए एक समकोण त्रिभुज ABC लें जिसका कोण B समकोण है। मान लीजिए BD कर्ण AC पर लंब है (देखिए आकृति 6.45)।



आकृति 6.45

आप देख सकते हैं कि Δ ADB और Δ ABC में

$$\angle A = \angle A$$

और $\angle ADB = \angle ABC$ (क्यों?)

अतः $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (कैसे?) (1)

इसी प्रकार $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (कैसे?) (2)

अतः, (1) और (2) के अनुसार, लम्ब BD के दोनों ओर के त्रिभुज संपूर्ण त्रिभुज ABC के समरूप हैं।

साथ ही, क्योंकि $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ है

और $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ है

इसलिए $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ (अनुच्छेद 6.2 की टिप्पणी से)

उपरोक्त चर्चा से, हम निम्नलिखित प्रमेय पर पहुँचते हैं:

प्रमेय 6.7 : *यदि किसी समकोण त्रिभुज के समकोण वाले शीर्ष से कर्ण पर लंब डाला जाए तो इस लंब के दोनों ओर बने त्रिभुज संपूर्ण त्रिभुज के समरूप होते हैं तथा परस्पर भी समरूप होते हैं।*

पाइथागोरस
(569-479 ई.)

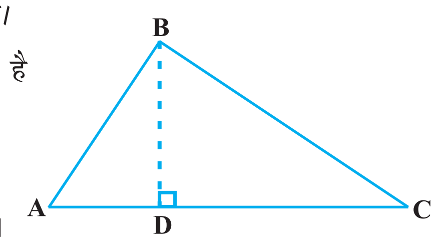
आइए पाइथागोरस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए उपरोक्त प्रमेय का प्रयोग करें।

प्रमेय 6.8 : *एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।*

उपपत्ति : हमें एक समकोण त्रिभुज ABC दिया है जिसका $\angle B$ समकोण है।

हमें सिद्ध करना है कि $AC^2 = AB^2 + BC^2$

आइए $BD \perp AC$ खीचें (देखिए आकृति 6.46)।



आकृति 6.46

अब $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (प्रमेय 6.7)

अत: $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (भुजाएँ समानुपाती हैं)

या $AD . AC = AB^2$ (1)

साथ ही $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (प्रमेय 6.7)

अत: $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$ (भुजाएँ समानुपाती हैं)

या $CD . AC = BC^2$ (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर

$$AD . AC + CD . AC = AB^2 + BC^2$$

या $$AC (AD + CD) = AB^2 + BC^2$$

या $$AC . AC = AB^2 + BC^2$$

या $$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

उपरोक्त प्रमेय को पहले एक प्राचीन भारतीय गणितज्ञ *बौधायन* (लगभग 800 ई.पू.) ने निम्नलिखित रूप में दिया था:

एक आयत का विकर्ण स्वयं से उतना ही क्षेत्रफल निर्मित करता है, जितना उसकी दोनों भुजाओं (अर्थात् लंबाई और चौड़ाई) से मिल कर बनता है।

इसका अर्थ है:

किसी आयत के विकर्ण से बने वर्ग का क्षेत्रफल इसकी दोनों आसन्न भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

इसी कारण, इस प्रमेय को कभी-कभी *बौधायन प्रमेय* भी कहा जाता है।

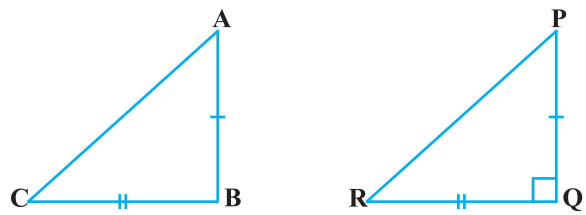
पाइथागोरस प्रमेय के विलोम के बारे में क्या कहा जा सकता है? आप पिछली कक्षाओं में इसकी जाँच कर चुके हैं कि यह विलोम भी सत्य है। अब हम इसे एक प्रमेय के रूप में सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 6.9 : *यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।*

उपपत्ति : यहाँ हमें एक त्रिभुज ABC दिया है जिसमें $AC^2 = AB^2 + BC^2$ है।

हमें सिद्ध करना है कि $\angle B = 90°$ है।

इसे प्रारंभ करने के लिए हम एक Δ PQR की रचना करते हैं जिसमें $\angle Q = 90^\circ$, PQ = AB और QR = BC (देखिए आकृति 6.47)।



आकृति 6.47

अब, Δ PQR से हमें प्राप्त है:

	$PR^2 = PQ^2 + QR^2$	(पाइथागोरस प्रमेय, क्योंकि $\angle Q = 90^\circ$ है)	
या	$PR^2 = AB^2 + BC^2$	(रचना से)	(1)
परंतु	$AC^2 = AB^2 + BC^2$	(दिया है)	(2)
अत:	AC = PR	[(1) और (2) से]	(3)

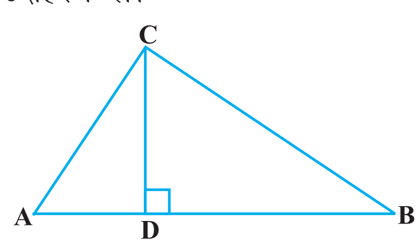
अब, Δ ABC और Δ PQR में

	AB = PQ	(रचना से)
	BC = QR	(रचना से)
	AC = PR	[ऊपर (3) में सिद्ध किया है]
अत:	$\Delta ABC \cong \Delta PQR$	(SSS सर्वांगसमता)
इसलिए	$\angle B = \angle Q$	(CPCT)
परंतु	$\angle Q = 90^\circ$	(रचना से)
अत:	$\angle B = 90^\circ$	

टिप्पणी : इस प्रमेय की एक अन्य उपपत्ति के लिए परिशिष्ट 1 देखिए।

आइए इन प्रमेयों का प्रयोग दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 10 : आकृति 6.48 में $\angle ACB = 90^\circ$ तथा $CD \perp AB$ है। सिद्ध कीजिए कि है।



आकृति 6.48

हल : $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (प्रमेय 6.7)

अत: $$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

या $$AC^2 = AB \,.\, AD \qquad (1)$$

इसी प्रकार $\Delta\, BCD \sim \Delta\, BAC$ (प्रमेय 6.7)

अत: $$\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$$

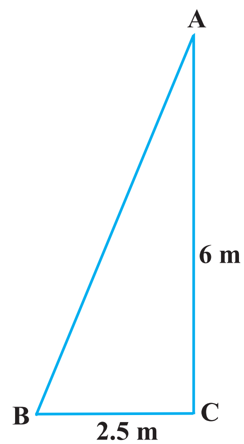
या $$BC^2 = BA \,.\, BD \qquad (2)$$

अत: (1) और (2) से

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BA \cdot BD}{AB \cdot AD} = \frac{BD}{AD}$$

उदाहरण 11 : एक सीढ़ी किसी दीवार पर इस प्रकार टिकी हुई है कि इसका निचला सिरा दीवार से 2.5 m की दूरी पर है तथा इसका ऊपरी सिरा भूमि से 6 m की ऊँचाई पर बनी एक खिड़की तक पहुँचता है। सीढ़ी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए AB सीढ़ी है तथा CA दीवार है जिसमें खिड़की A पर है (देखिए आकृति 6.49)।



आकृति 6.49

साथ ही $BC = 2.5$ m और $CA = 6$ m है।

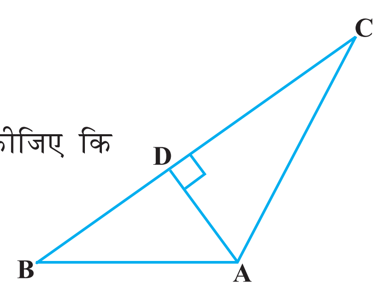
पाइथागोरस प्रमेय से हमें प्राप्त होता है:

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$
$$= (2.5)^2 + (6)^2$$
$$= 42.25$$

अत: $AB = 6.5$

इस प्रकार, सीढ़ी की लंबाई 6.5 m है।

उदाहरण 12 : आकृति 6.50 में $AD \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ है।



आकृति 6.50

हल : Δ ADC से हमें प्राप्त होता है:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \qquad (1)$$

(पाइथागोरस प्रमेय)

Δ ADB से हमें प्राप्त होता है:

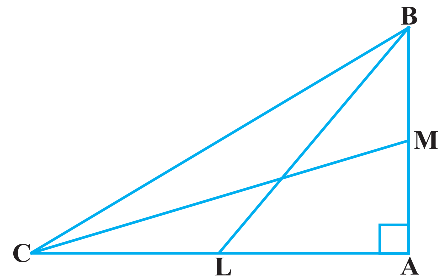
$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad (2) \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय)}$$

(2) में से (1) को घटाने पर हमें प्राप्त होता है:

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

या $$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$

उदहारण 13 : BL और CM एक समकोण त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ हैं तथा इस त्रिभुज का कोण A समकोण है। सिद्ध कीजिए कि $4 (BL^2 + CM^2) = 5 BC^2$



आकृति 6.51

हल : BL और CM एक Δ ABC की माध्यिकाएँ हैं; जिसमें $\angle A = 90°$ है (देखिए आकृति 6.51)।

Δ ABC से

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय)} \quad (1)$$

Δ ABL से

$$BL^2 = AL^2 + AB^2$$

या $$BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2 \quad \text{(AC का मध्य-बिंदु L है)}$$

या $$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$$

या $$4\,BL^2 = AC^2 + 4\,AB^2 \quad (2)$$

Δ CMA से

$$CM^2 = AC^2 + AM^2$$

या $$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \quad \text{(AB का मध्य बिंदु M है)}$$

या $$CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

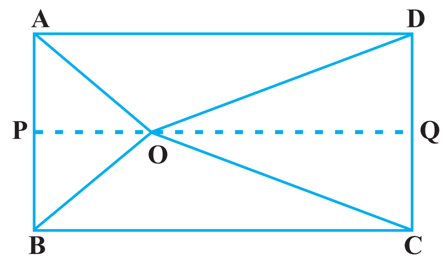
या $$4\,CM^2 = 4\,AC^2 + AB^2 \quad (3)$$

(2) और (3) को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है:

$$4 (BL^2 + CM^2) = 5 (AC^2 + AB^2)$$

या $$4 (BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2 \quad [(1) \text{ से}]$$

उदाहरण 14 : आयत ABCD के अंदर स्थित O कोई बिंदु है (देखिए आकृति 6.52)। सिद्ध कीजिए कि $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$ है।



आकृति 6.52

हल :

O से होकर जाती हुई PQ || BC खींचिए, जिससे कि P भुजा AB पर स्थित हो तथा Q भुजा DC पर स्थित हो।

अब $PQ \parallel BC$ है

अत: $PQ \perp AB$ और $PQ \perp DC$ ($\angle B = 90°$ और $\angle C = 90°$)

इसलिए $\angle BPQ = 90°$ और $\angle CQP = 90°$ है।

अत: BPQC और APQD दोनों आयत हैं।

अब Δ OPB से

$$OB^2 = BP^2 + OP^2 \quad (1)$$

इसी प्रकार Δ OQD से

$$OD^2 = OQ^2 + DQ^2 \quad (2)$$

Δ OQC से हमें प्राप्त होता है

$$OC^2 = OQ^2 + CQ^2 \quad (3)$$

तथा Δ OAP से हमें प्राप्त होता है

$$OA^2 = AP^2 + OP^2 \quad (4)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर

$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$

$$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2$$

(क्योंकि BP = CQ और DQ = AP है)

$$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$$

$$= OC^2 + OA^2 \quad [(3) \text{ और } (4) \text{ से}]$$

प्रश्नावली 6.5

1. कुछ त्रिभुजों की भुजाएँ नीचे दी गई हैं। निर्धारित कीजिए कि इनमें से कौन-कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं। इस स्थिति में कर्ण की लंबाई भी लिखिए।

(i) 7 cm, 24 cm, 25 cm (ii) 3 cm, 8 cm, 6 cm

(iii) 50 cm, 80 cm, 100 cm (iv) 13 cm, 12 cm, 5 cm

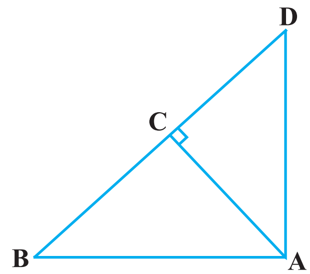
2. PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण P समकोण है तथा QR पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि $PM \perp QR$ है। दर्शाइए कि $PM^2 = QM \,.\, MR$ है।

3. आकृति 6.53 में ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा $AC \perp BD$ है। दर्शाइए कि

(i) $AB^2 = BC \,.\, BD$

(ii) $AC^2 = BC \,.\, DC$

(iii) $AD^2 = BD \,.\, CD$



आकृति 6.53

4. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है।

5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ है। यदि $AB^2 = 2\,AC^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है।

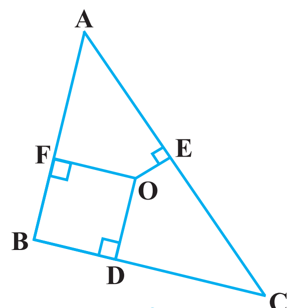
6. एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है। उसके प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

7. सिद्ध कीजिए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।

8. आकृति 6.54 में ΔABC के अभ्यंतर में स्थित कोई बिंदु O है तथा $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ और $OF \perp AB$ है। दर्शाइए कि

(i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

(ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$



आकृति 6.54

9. 10 m लंबी एक सीढ़ी एक दीवार पर टिकाने पर भूमि से 8 m की ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

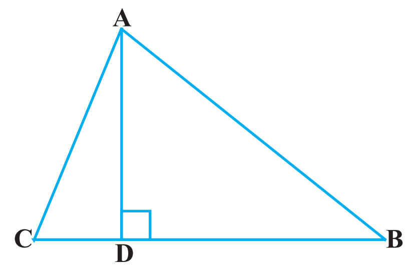
10. 18 m ऊंचे एक ऊर्ध्वाधर खंभे के ऊपरी सिरे से एक तार का एक सिरा जुड़ा हुआ है तथा तार का दूसरा सिरा एक खूँटे से जुड़ा हुआ है। खंभे के आधार से खूँटे को कितनी दूरी पर गाड़ा जाए कि तार तना रहे जबकि तार की लंबाई 24 m है।

11. एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की ओर 1000 km/hr की चाल से उड़ता है। इसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 1200 km/hr की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घंटे के बाद दोनों हवाई जहाजों के बीच की दूरी कितनी होगी?

12. दो खंभे जिनकी ऊँचाईयाँ 6 m और 11 m हैं तथा ये समतल भूमि पर खड़े हैं। यदि इनके निचले सिरों के बीच की दूरी 12 m है तो इनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

13. एक त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है, की भुजाओं CA और CB पर क्रमशः बिंदु D और E स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ है।

14. किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A से BC पर डाला गया लम्ब BC को बिंदु D पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि DB = 3 CD है (देखिए आकृति 6.55)। सिद्ध कीजिए कि $2\,AB^2 = 2\,AC^2 + BC^2$ है।



आकृति 6.55

15. किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है कि $BD = \frac{1}{3}BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $9\,AD^2 = 7\,AB^2$ है।

16. किसी समबाहु त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलंब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है।

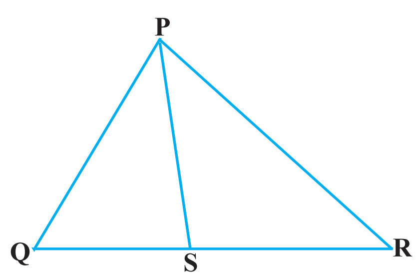
17. सही उत्तर चुनकर उसका औचित्य दीजिए: Δ ABC में, $AB = 6\sqrt{3}$ cm, AC = 12 cm और BC = 6 cm है। कोण B है:

(A) 120° (B) 60°

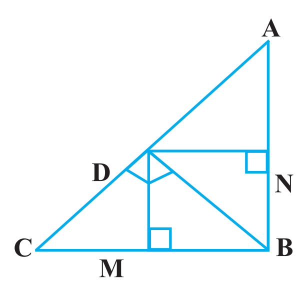
(C) 90° (D) 45°

अभ्यास 6.6 (ऐच्छिक)*

1. आकृति 6.56 में PS कोण QPR का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$ है।



आकृति 6.56



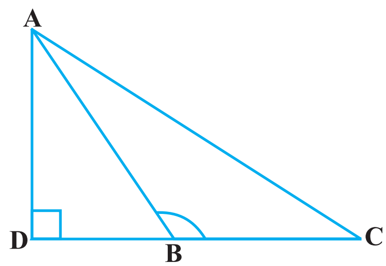
आकृति 6.57

2. आकृति 6.57 में D त्रिभुज ABC के कर्ण AC पर स्थित एक बिंदु है जबकि $BD \perp AC$ तथा $DM \perp BC$ और $DN \perp AB$ है। सिद्ध कीजिए कि

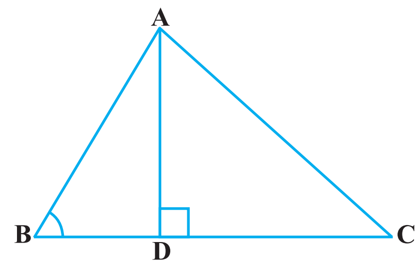
(i) $DM^2 = DN \cdot MC$ (ii) $DN^2 = DM \cdot AN$

* यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं दी गई है।

3. आकृति 6.58 में ABC एक त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC > 90°$ है तथा $AD \perp CB$ है। सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\, BC\, .\, BD$ है।



आकृति 6.58



आकृति 6.59

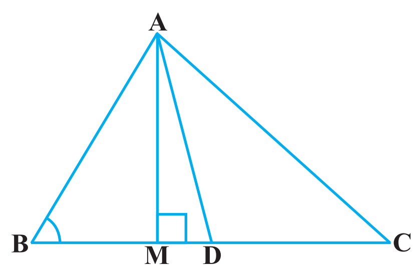
4. आकृति 6.59 में ABC एक त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC < 90°$ है तथा $AD \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\, BC\, .\, BD$ है।

5. आकृति 6.60 में AD त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है तथा $AM \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए कि

(i) $AC^2 = AD^2 + BC\, .\, DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(ii) $AB^2 = AD^2 - BC\, .\, DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(iii) $AC^2 + AB^2 = 2\, AD^2 + \frac{1}{2}\, BC^2$



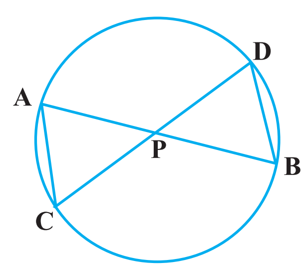
आकृति 6.60

6. सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

7. आकृति 6.61 में एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि

(i) $\Delta APC \sim \Delta DPB$

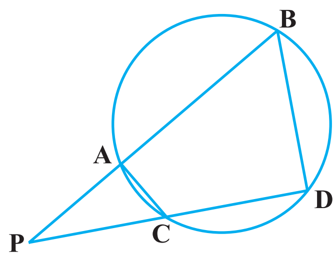
(ii) $AP\, .\, PB = CP\, .\, DP$



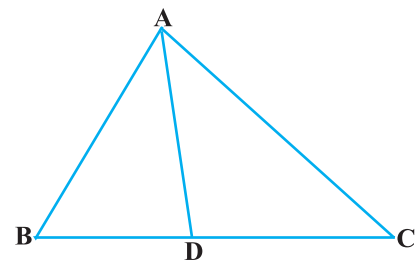
आकृति 6.61

8. आकृति 6.62 में एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD बढ़ाने पर परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि

(i) $\Delta PAC \sim \Delta PDB$ (ii) $PA . PB = PC . PD$



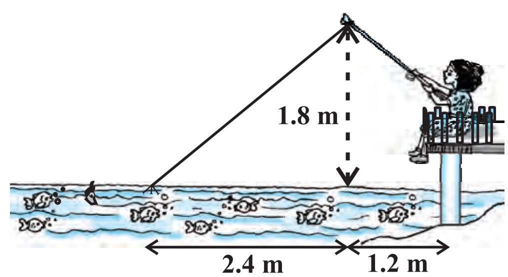
आकृति 6.62



आकृति 6.63

9. आकृति 6.63 में त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है कि $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ है। सिद्ध कीजिए कि AD, कोण BAC का समद्विभाजक है।

10. नाज़िमा एक नदी की धारा में मछलियाँ पकड़ रही है। उसकी मछली पकड़ने वाली छड़ का सिरा पानी की सतह से 1.8 m ऊपर है तथा डोरी के निचले सिरे से लगा काँटा पानी के सतह पर इस प्रकार स्थित है कि उसकी नाजिमा से दूरी 3.6 m है और छड़ के सिरे के ठीक नीचे पानी के सतह पर स्थित बिंदु से उसकी दूरी 2.4 m है। यह मानते हुए कि उसकी डोरी (उसकी छड़ के सिरे से काँटे तक) तनी हुई है, उसने कितनी डोरी बाहर निकाली हुई है (देखिए आकृति 6.64)? यदि वह डोरी को 5cm/s की दर से अंदर खींचे, तो 12 सेकंड के बाद नाजिमा की काँटे से क्षैतिज दूरी कितनी होगी?



आकृति 6.64

6.7 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. दो आकृतियाँ जिनके आकार समान हों, परंतु आवश्यक रूप से आमाप समान न हों, समरूप आकृतियाँ कहलाती हैं।
2. सभी सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।

3. भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (i) उनके संगत कोण बराबर हों तथा (ii) उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) हों।
4. यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए, एक रेखा खींची जाए, तो ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।
5. यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो यह रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।
6. यदि दो त्रिभुजों में, संगत कोण बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में होती हैं और इसीलिए दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं (AAA समरूपता कसौटी)।
7. यदि दो त्रिभुजों में, एक त्रिभुज के दो कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं (AA समरूपता कसौटी)।
8. यदि दो त्रिभुजों में, संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में हों, तो उनके संगत कोण बराबर होते हैं और इसीलिए दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं (SSS समरूपता कसौटी)।
9. यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों को अंतर्गत करने वाली भुजाएँ एक ही अनुपात में हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं (SAS समरूपता कसौटी)।
10. दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है।
11. यदि एक समकोण त्रिभुज के समकोण वाले शीर्ष से उसके कर्ण पर लंब डाला जाए तो लंब के दोनों ओर बनने वाले त्रिभुज संपूर्ण त्रिभुज के समरूप होते हैं तथा परस्पर भी समरूप होते हैं।
12. एक समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है (पाइथागोरस प्रमेय)।
13. यदि एक त्रिभुज में, किसी एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो, तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

पाठकों के लिए विशेष

यदि दो समकोण त्रिभुजों में एक त्रिभुज का कर्ण तथा एक भुजा, दूसरे त्रिभुज के कर्ण तथा एक भुजा के समानुपाती हो तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। इसे RHS समरूपता कसौटी कहा जा सकता है।

यदि आप इस कसौटी को अध्याय 8 के उदाहरण 2 में प्रयोग करते हैं तो उपपति और भी सरल हो जाएगी।

1063CH07

निर्देशांक ज्यामिति (Coordinate Geometry) 7

7.1 भूमिका

कक्षा IX में, आप पढ़ चुके हैं कि एक तल पर किसी बिंदु की स्थिति निर्धारित करने के लिए, हमें निर्देशांक अक्षों के एक युग्म की आवश्यकता होती है। किसी बिंदु की y-अक्ष से दूरी उस बिंदु का ***x*-निर्देशांक** या **भुज** (abscissa) कहलाती है। किसी बिंदु की x-अक्ष से दूरी, उस बिंदु का ***y*-निर्देशांक** या **कोटि** (ordinate) कहलाती है। x-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(x, 0)$ के रूप के होते हैं तथा y-अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक $(0, y)$ के रूप के होते हैं।

यहाँ आपके लिए एक खेल दिया जा रहा है। एक आलेख कागज़ पर लांबिक अक्षों (perpendicular axes) का एक युग्म खींचिए। अब निम्नलिखित बिंदुओं को आलेखित कीजिए और दिए गए निर्देशों के अनुसार उन्हें मिलाइए। बिंदु A(4, 8) को B(3, 9) से, B को C(3, 8) से, C को D(1, 6) से, D को E(1, 5) से, E को F(3, 3) से, F को G(6, 3) से, G को H(8, 5) से, H को I(8, 6) से, I को J(6, 8) से, J को K(6, 9) से, K को L(5, 8) से और L को A से मिलाइए। इसके बाद, बिंदुओं P(3.5, 7), Q (3, 6) और R(4, 6) को जोड़ कर एक त्रिभुज बनाइए। साथ ही, एक त्रिभुज बनाने के लिए बिंदुओं X(5.5, 7), Y(5, 6) और Z(6, 6) को मिलाइए। अब एक और त्रिभुज बनाने के लिए, बिंदुओं S(4, 5), T(4.5, 4) और U(5, 5) को मिलाइए। अंत में, बिंदु S को बिंदुओं (0, 5) और (0, 6) से मिलाइए तथा बिंदु U को बिंदुओं (9, 5) और (9, 6) से मिलाइए। आपको कौन-सा चित्र प्राप्त होता है?

साथ ही, आप यह भी देख चुके हैं कि $ax + by + c = 0$ (जहाँ a और b एक साथ शून्य न हों) के रूप की दो चरों वाली एक समीकरण को जब आलेखीय रूप से निरूपित करते हैं, तो एक सरल रेखा प्राप्त होती है। साथ ही, अध्याय 2 में आप देख चुके हैं कि

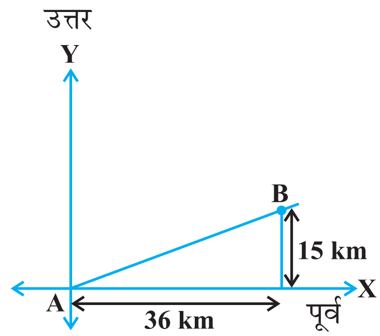
$y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ का आलेख एक परवलय (parabola) होता है। वस्तुतः, आकृतियों की ज्यामिति का अध्ययन करने के लिए, निर्देशांक ज्यामिति (coordinate geometry) एक बीजीय साधन (algebraic tool) के रूप में विकसित की गई है। यह बीजगणित का प्रयोग करके ज्यामिति का अध्ययन करने में सहायता करती है तथा बीजगणित को ज्यामिति द्वारा समझने में भी सहायक होती है। इसी कारण, निर्देशांक ज्यामिति के विभिन्न क्षेत्रों में व्यापक अनुप्रयोग हैं, जैसे भौतिकी, इंजीनियरिंग, समुद्री–परिवहन (या नौ–गमन) (navigation), भूकंप शास्त्र संबंधी (seismology) और कला।

इस अध्याय में, आप यह सीखेंगे कि दो बिंदुओं, जिनके निर्देशांक दिए हुए हों, के बीच की दूरी किस प्रकार ज्ञात की जाती है तथा तीन दिए हुए बिंदुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात किया जाता है। आप इसका भी अध्ययन करेंगे कि दिए हुए दो बिंदुओं को मिलाने से बने रेखाखंड को एक दिए गए अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं।

7.2 दूरी सूत्र

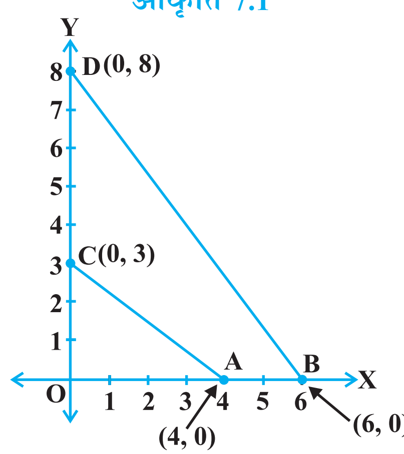
आइए निम्नलिखित स्थिति पर विचार करें:

एक शहर B एक अन्य शहर A से 36 km पूर्व (east) और 15 km उत्तर (north) की ओर है। आप शहर B की शहर A से दूरी बिना वास्तविक मापन के किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं? आइए देखें। इस स्थिति को, आलेखीय रूप से, आकृति 7.1 की तरह दर्शाया जा सकता है। अब, आप वांछित दूरी ज्ञात करने के लिए, पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग कर सकते हैं।



आकृति 7.1

अब, मान लीजिए दो बिंदु x–अक्ष पर स्थित हैं। क्या हम इनके बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं? उदाहरणार्थ, आकृति 7.2 के दो बिंदुओं A(4, 0) और B(6, 0) पर विचार कीजिए। बिंदु A और B, x-अक्ष पर स्थित है।



आकृति 7.2

आकृति से आप देख सकते हैं कि OA = 4 मात्रक (इकाई) और OB = 6 मात्रक हैं।

अतः, A से B की दूरी AB = OB – OA = (6 – 4) मात्रक = 2 मात्रक है।

इस प्रकार, यदि दो बिंदु x–अक्ष पर स्थित हों, तो हम उनके बीच की दूरी सरलता से ज्ञात कर सकते हैं।

अब, मान लीजिए, हम y–अक्ष पर स्थित कोई दो बिंदु लेते हैं। क्या हम इनके बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं? यदि बिंदु C(0, 3) और D(0, 8), y–अक्ष पर स्थित हों, तो हम दूरी ऊपर की भाँति ज्ञात कर सकते हैं अर्थात् दूरी CD = (8 – 3) मात्रक = 5 मात्रक है (देखिए आकृति 7.2)।

पुनः, क्या आप आकृति 7.2 में, बिंदु C से बिंदु A की दूरी ज्ञात कर सकते हैं? चूँकि OA = 4 मात्रक और OC = 3 मात्रक हैं, इसलिए C से A की दूरी AC = $\sqrt{3^2 + 4^2}$ = 5 मात्रक है। इसी प्रकार, आप D से B की दूरी BD = 10 मात्रक ज्ञात कर सकते हैं।

अब, यदि हम ऐसे दो बिंदुओं पर विचार करें, जो निर्देशांक अक्षों पर स्थित नहीं हैं, तो क्या हम इनके बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं? हाँ! ऐसा करने के लिए, हम पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करेंगे। आइए एक उदाहरण लेकर देखें।

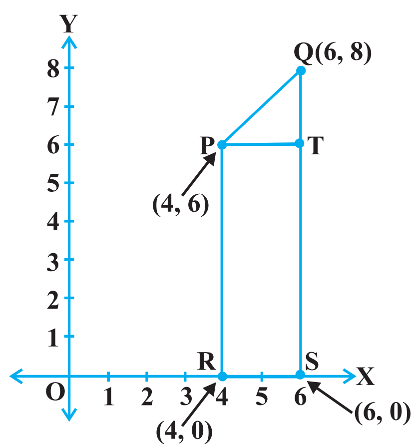
आकृति 7.3 में, बिंदु P(4, 6) और Q(6, 8) प्रथम चतुर्थांश (first quadrant) में स्थित हैं। इनके बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए, हम पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग कैसे करते हैं? आइए P और Q से x-अक्ष पर क्रमशः लंब PR और QS खीचें। साथ ही, P से QS पर एक लंब डालिए जो QS को T पर प्रतिच्छेद करे। तब R और S के निर्देशांक क्रमशः (4, 0) और (6, 0) हैं। अतः, RS = 2 मात्रक है। साथ ही, QS = 8 मात्रक और TS = PR = 6 मात्रक है।

स्पष्ट है कि QT = 2 मात्रक और PT = RS = 2 मात्रक।

अब, पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग से, हमें प्राप्त होता है:

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= 2^2 + 2^2 = 8$$

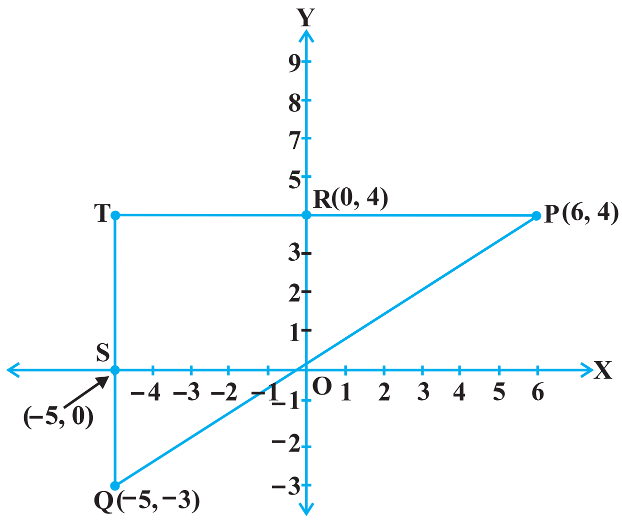
अतः $PQ = 2\sqrt{2}$ मात्रक हुआ।



आकृति 7.3

आप दो भिन्न-भिन्न चतुर्थांशों में स्थित बिंदुओं के बीच की दूरी कैसे ज्ञात करेंगे?

बिंदुओं P(6, 4) और Q(–5, –3) पर विचार कीजिए (देखिए आकृति 7.4)। x-अक्ष पर लंब QS खींचिए। साथ ही, बिंदु P से बढ़ाई हुई QS पर PT लंब खींचिए जो y-अक्ष को बिंदु R पर प्रतिच्छेद करे।



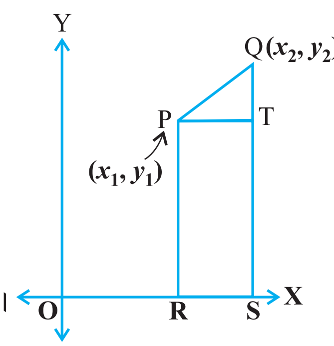
आकृति 7.4

तब, PT = 11 मात्रक और QT = 7 मात्रक है (क्यों?)

समकोण त्रिभुज PTQ में, पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग से, हमें प्राप्त होता है:

$PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$ मात्रक

आइए, अब किन्हीं दो बिंदुओं $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी ज्ञात करें। x-अक्ष पर लंब PR और QS खींचिए। P से QS पर एक लंब खींचिए, जो उसे T पर प्रतिच्छेद करे (देखिए आकृति 7.5)।



आकृति 7.5

तब, $OR = x_1$, $OS = x_2$ है। अत:, $RS = x_2 - x_1 = PT$ है।

साथ ही, $SQ = y_2$ और $ST = PR = y_1$ है। अत:, $QT = y_2 - y_1$ है।

अब, Δ PTQ में, पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग से, हमें प्राप्त होता है:

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

अत: $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ध्यान दें कि चूँकि दूरी सदैव ऋणेतर होती है, हम केवल धनात्मक वर्गमूल लेते हैं।

अतः $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बिंदुओं के बीच की दूरी है

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

जो दूरी सूत्र (distance formula) कहलाता है।

टिप्पणियाँ :

1. विशेष रूप से, बिंदु $P(x, y)$ की मूल बिंदु $O(0, 0)$ से दूरी

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ होती है।}$$

2. हम $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ भी लिख सकते हैं (क्यों?)

उदाहरण 1 : क्या बिंदु (3, 2), (–2, –3) और (2, 3) एक त्रिभुज बनाते हैं? यदि हाँ, तो बताइए कि किस प्रकार का त्रिभुज बनता है।

हल : आइए PQ, QR और PR ज्ञात करने के लिए दूरी सूत्र का प्रयोग करें, जहाँ P(3, 2), Q(–2, –3) और R(2, 3) दिए हुए बिंदु हैं। हमें प्राप्त होता है:

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (लगभग)}$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (लगभग)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (लगभग)}$$

चूँकि इन तीन दूरियों में से किन्हीं दो का योग तीसरी दूरी से अधिक है, इसलिए इन बिंदुओं P, Q और R से एक त्रिभुज बनता है।

साथ ही, यहाँ $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ है। अतः, पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से, हमें ज्ञात होता है कि $\angle P = 90°$ है।

इसलिए, PQR एक समकोण त्रिभुज है।

उदाहरण 2 : दर्शाइए कि बिंदु (1, 7), (4, 2), (–1, –1) और (– 4, 4) एक वर्ग के शीर्ष हैं।

हल : मान लीजिए दिए हुए बिंदु A(1, 7), B(4, 2), C(–1, –1) और D(– 4, 4) हैं। ABCD को एक वर्ग दर्शाने की एक विधि यह है कि उसका गुणधर्म जैसा कि वर्ग की सभी भुजाएँ बराबर तथा दोनों विकर्ण बराबर होती हैं, का प्रयोग किया जाए। अब,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

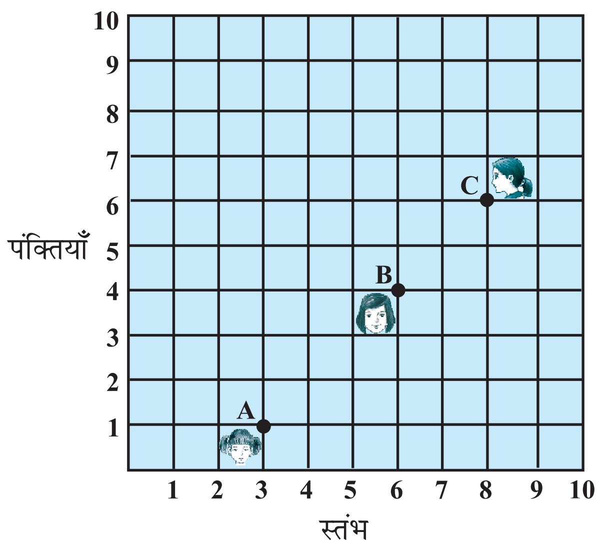
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

यहाँ, AB = BC = CD = DA है और AC = BD है, अर्थात् चतुर्भुज ABCD की चारों भुजाएँ बराबर हैं और दोनों विकर्ण भी बराबर हैं। अत: चतुर्भुज ABCD एक वर्ग है।

वैकल्पिक हल : हम चारों भुजाएँ और एक विकर्ण, मान लीजिए AC ऊपर की तरह ज्ञात करते हैं। यहाँ $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$ है। अत:, पाइथागोरस प्रमेय के विलोम द्वारा $\angle D = 90°$ है। चारों भुजाएँ बराबर होने और एक कोण समकोण होने से चतुर्भुज एक वर्ग हो जाता है। अत: ABCD एक वर्ग है।

उदाहरण 3 : आकृति 7.6 किसी कक्षा में रखे डेस्कों (desks) की व्यवस्था दर्शाती है। आशिमा, भारती और कैमिला क्रमश: A(3, 1), B(6, 4) और C(8, 6) पर बैठी हैं। क्या आप सोचते हैं कि वे एक ही सीध (in a line) में बैठी हैं? सकारण उत्तर दीजिए।



आकृति 7.6

हल : दूरी सूत्र के प्रयोग से, हमें प्राप्त होता है :

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

चूँकि $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$ है, अतः हम कह सकते हैं कि A, B और C सरेखी (collinear) हैं। अर्थात्, वे तीनों एक ही सीध में बैठी हैं।

उदाहरण 4 : x और y में एक संबंध ज्ञात कीजिए, ताकि बिंदु (x, y) बिंदुओं (7, 1) और (3, 5) से समदूरस्थ (equidistant) हो।

हल : मान लीजिए $P(x, y)$ बिंदुओं A(7, 1) और B(3, 5) से समदूरस्थ है।

हमें AP = BP दिया है। अतः, $AP^2 = BP^2$ है।

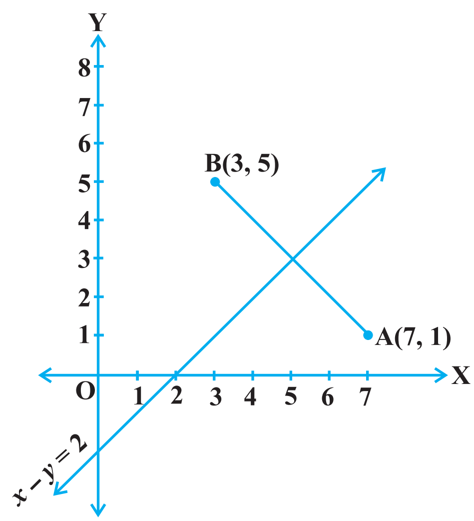
अर्थात् $$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

अर्थात् $$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

अर्थात् $$x - y = 2$$

यही x और y में वांछित संबंध है।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि समीकरण $x - y = 2$ का आलेख एक रेखा होता है। आप अपने पिछले अध्ययन से यह जानते हैं कि वह बिंदु जो दो दिए हुए बिंदुओं A और B से समदूरस्थ होता है रेखाखंड AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित होता है। अतः, $x - y = 2$ का आलेख रेखाखंड AB का लंब समद्विभाजक है (देखिए आकृति 7.7)।



आकृति 7.7

उदाहरण 5 : y-अक्ष पर एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं A(6, 5) और B(– 4, 3) से समदूरस्थ हो।

हल : हम जानते हैं कि y-अक्ष पर स्थित कोई भी बिंदु $(0, y)$ के रूप का होता है। अतः, मान लीजिए कि बिंदु $P(0, y)$ बिंदुओं A और B से समदूरस्थ है। तब,

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

या $$36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$$

या $$4y = 36$$

या $$y = 9$$

अत:, वांछित बिंदु (0, 9) है।

आइए अपने हल की जाँच करें: $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

टिप्पणी : ऊपर दी गई टिप्पणी का प्रयोग करने से, हम देखते हैं कि (0, 9), y-अक्ष और रेखाखंड AB के लंब समद्विभाजक का प्रतिच्छेद बिंदु है।

प्रश्नावली 7.1

1. बिंदुओं के निम्नलिखित युग्मों के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए:

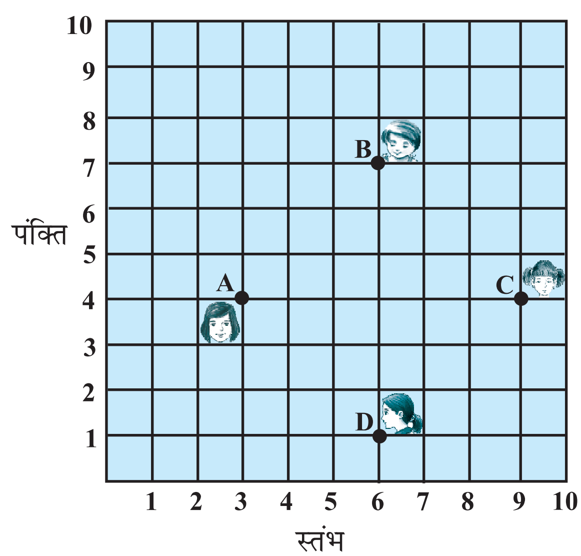
   (i) (2, 3), (4, 1) (ii) (– 5, 7), (– 1, 3) (iii) $(a, b), (-a, -b)$

2. बिंदुओं (0, 0) और (36, 15) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। क्या अब आप अनुच्छेद 7.2 में दिए दोनों शहरों A और B के बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं?

3. निर्धारित कीजिए कि क्या बिंदु (1, 5), (2, 3) और (– 2, – 11) संरेखी हैं।

4. जाँच कीजिए कि क्या बिंदु (5, – 2), (6, 4) और (7, – 2) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

5. किसी कक्षा में, चार मित्र बिंदुओं A, B, C और D पर बैठे हुए हैं, जैसाकि आकृति 7.8 में दर्शाया गया है। चंपा और चमेली कक्षा के अंदर आती हैं और कुछ मिनट तक देखने के बाद, चंपा चमेली से पूछती है, 'क्या तुम नहीं सोचती हो कि ABCD एक वर्ग है?' चमेली इससे सहमत नहीं है। दूरी सूत्र का प्रयोग करके, बताइए कि इनमें कौन सही है।



आकृति 7.8

6. निम्नलिखित बिंदुओं द्वारा बनने वाले चतुर्भुज का प्रकार (यदि कोई है तो) बताइए तथा अपने

उत्तर के लिए कारण भी दीजिए:

(i) $(-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0)$

(ii) $(-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)$

(iii) $(4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)$

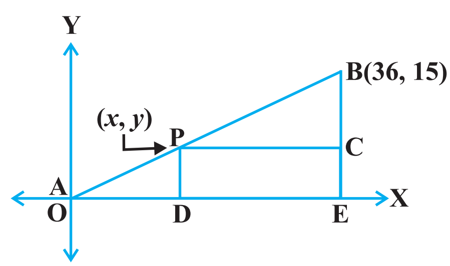
7. x-अक्ष पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए जो $(2, -5)$ और $(-2, 9)$ से समदूरस्थ हैं।

8. y का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए बिंदु $P(2, -3)$ और $Q(10, y)$ के बीच की दूरी 10 मात्रक है।

9. यदि $Q(0, 1)$ बिंदुओं $P(5, -3)$ और $R(x, 6)$ से समदूरस्थ है, तो x के मान ज्ञात कीजिए। दूरियाँ QR और PR भी ज्ञात कीजिए।

10. x और y में एक ऐसा संबंध ज्ञात कीजिए कि बिंदु (x, y) बिंदुओं $(3, 6)$ और $(-3, 4)$ से समदूरस्थ हो।

7.3 विभाजन सूत्र (Section Formula)



आकृति 7.9

आइए अनुच्छेद 7.2 में दी हुई स्थिति को याद करें। मान लीजिए कि टेलीफोन कंपनी शहरों A और B के बीच में एक प्रसारण टॉवर (relay tower) ऐसे स्थान P पर स्थापित करना चाहती है कि टॉवर की B से दूरी उसकी A से दूरी की दुगुनी हो। यदि P रेखाखंड AB पर स्थित है, तो यह AB को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करे। (देखिए आकृति 7.9)। यदि हम A को मूलबिंदु O मानें तथा 1 km को दोनों अक्षों पर 1 मात्रक मानें, तो B के निर्देशांक (36, 15) होंगे। P की स्थिति जानने के लिए हमें P के निर्देशांक ज्ञात करने चाहिए। ये निर्देशांक हम किस प्रकार ज्ञात करें?

मान लीजिए P के निर्देशांक (x, y) हैं। P और B से x-अक्ष पर लंब खींचिए जो इसे क्रमशः D और E पर मिलें। BE पर लंब PC खींचिए जो उससे C पर मिले। तब, अध्याय 6 में, पढ़ी गई AA समरूपता कसौटी के प्रयोग से, Δ POD और Δ BPC समरूप हैं।

अतः $\dfrac{OD}{PC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$ तथा $\dfrac{PD}{BC} = \dfrac{OP}{PB} = \dfrac{1}{2}$ है।

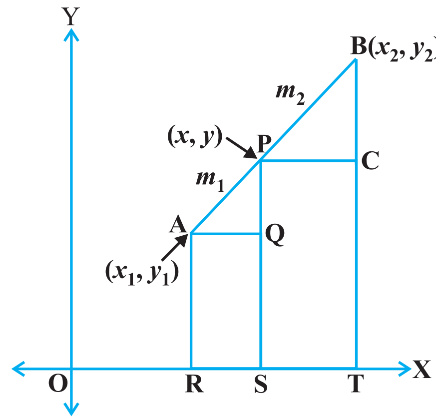
अतः $\dfrac{x}{36 - x} = \dfrac{1}{2}$ तथा $\dfrac{y}{15 - y} = \dfrac{1}{2}$ है।

इन समीकरणों से $x = 12$ और $y = 5$ प्राप्त होता है।

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि P(12, 5) प्रतिबंध OP : PB = 1 : 2 को संतुष्ट करता है।

आइए अब उपरोक्त उदाहरण से प्राप्त की गई समझ के आधार पर विभाजन का व्यापक सूत्र प्राप्त करने का प्रयत्न करें।

किन्हीं दो बिंदुओं A(x_1, y_1) और B(x_2, y_2) पर विचार कीजिए और मान लीजिए बिंदु P (x, y) रेखाखंड AB को $m_1 : m_2$ के अनुपात में आंतरिक रूप से (internally) विभाजित करता है, अर्थात् $\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ है (देखिए आकृति 7.10)।



आकृति 7.10

x-अक्ष पर AR, PS और BT लंब खींचिए। x-अक्ष के समांतर AQ और PC खींचिए। तब AA समरूपता कसौटी से,

$$\Delta\, PAQ \sim \Delta\, BPC$$

अत:
$$\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \qquad (1)$$

अब
$$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$
$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$
$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$
$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

इन मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ लेने पर हमें $x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$ प्राप्त होता है।

इसी प्रकार $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ लेने पर हमें $y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$ प्राप्त होता है।

अतः, दो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को $m_1 : m_2$ के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करने वाले बिंदु $P(x, y)$ के निर्देशांक हैं :

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) \tag{2}$$

उपरोक्त को **विभाजन सूत्र** (section formula) कहते हैं।

इसी सूत्र को A, P और B से y-अक्ष पर लंब डालकर और ऊपर की भाँति प्रक्रिया अपनाकर भी प्राप्त किया जा सकता है।

यदि P रेखाखंड AB को $k : 1$ के अनुपात में विभाजित करे, तो बिंदु P के निर्देशांक

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right) \text{ होंगे।}$$

विशिष्ट स्थिति : एक रेखाखंड का मध्य-बिंदु उसे 1 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है। अतः, बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड AB के मध्य-बिंदु के निर्देशांक

$$\left(\frac{1\cdot x_1 + 1\cdot x_2}{1+1}, \frac{1\cdot y_1 + 1\cdot y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \text{ होंगे।}$$

आइए अब विभाजन सूत्र पर आधारित कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 6 : उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (4, – 3) और (8, 5) को जोड़ने वाले रेखाखंड को आंतरिक रूप से 3 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

हल : मान लीजिए $P(x, y)$ वांछित बिंदु है। विभाजन सूत्र का प्रयोग करने पर हमें

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3+1} = 7, \quad y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3+1} = 3$$

प्राप्त होता है। अतः (7, 3) ही वांछित बिंदु है।

उदाहरण 7 : बिंदु (– 4, 6), बिंदुओं A(– 6, 10) और B(3, – 8) को जोड़ने वाले रेखाखंड को किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल : मान लीजिए (– 4, 6) रेखाखंड AB को आंतरिक रूप से $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करता है। विभाजन सूत्र के प्रयोग से, हमें प्राप्त होता है:

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \quad (1)$$

याद कीजिए कि यदि $(x, y) = (a, b)$ हो, तो $x = a$ और $y = b$ होता है।

अतः $$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \text{ और } 6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} \text{ है।}$$

अब $$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \text{ से प्राप्त होता है:}$$

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

अर्थात् $$7m_1 = 2m_2$$

या $$m_1 : m_2 = 2 : 7$$

आपको इसकी जाँच कर लेनी चाहिए कि यह अनुपात y-निर्देशांक को भी संतुष्ट करता है।

अब $$\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\dfrac{m_1}{m_2} + 10}{\dfrac{m_1}{m_2} + 1} \quad (m_2 \text{ से ऊपर नीचे भाग देने पर})$$

$$= \frac{-8 \times \dfrac{2}{7} + 10}{\dfrac{2}{7} + 1} = 6$$

अतः बिंदु $(-4, 6)$, बिंदुओं A$(-6, 10)$ और B$(3, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को $2 : 7$ के अनुपात में विभाजित करता है।

वैकल्पिक हल : अनुपात $m_1 : m_2$ को $\frac{m_1}{m_2} : 1$, या $k : 1$ के रूप में लिखा जा सकता है। मान लीजिए बिंदु $(-4, 6)$ रेखाखंड AB को आंतरिक रूप से $k : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है। विभाजन सूत्र द्वारा, हमें प्राप्त होता है:

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k - 6}{k + 1}, \frac{-8k + 10}{k + 1}\right) \quad (2)$$

अतः $$-4 = \frac{3k-6}{k+1}$$

या $$-4k - 4 = 3k - 6$$

या $$7k = 2$$

या $$k : 1 = 2 : 7$$

आप y-निर्देशांक के लिए भी इसकी जाँच कर सकते हैं।

अतः, बिंदु (– 4, 6), बिंदुओं A(– 6, 10) और B(3, – 8) को जोड़ने वाले रेखाखंड को 2 : 7 के अनुपात में विभाजित करता है।

टिप्पणी : आप इस अनुपात को दूरियाँ PA और PB ज्ञात करके और फिर उनके अनुपात लेकर भी प्राप्त कर सकते हैं, जबकि आपको यह जानकारी हो कि बिंदु A, P और B संरेखी हैं।

उदाहरण 8 : बिंदुओं A(2, – 2) और B(– 7, 4) को जोड़ने वाले रेखाखंड को सम-त्रिभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए रेखाखंड AB को सम-त्रिभाजित करने वाले बिंदु P और Q हैं, अर्थात् AP = PQ = QB है (देखिए आकृति 7.11)।

Fig. 7.11

अतः, P रेखाखंड AB को आंतरिक रूप से 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है। अतः, P के निर्देशांक सूत्र द्वारा, निम्नलिखित हैं:

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right), \text{ अर्थात् } (-1, 0)$$

अब, Q रेखाखंड AB को आंतरिक रूप से 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है। अतः Q के निर्देशांक हैं:

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right), \text{ अर्थात् } (-4, 2)$$

अतः, बिंदुओं A और B को जोड़ने वाले रेखाखंड को सम-त्रिभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक (–1, 0) और (– 4, 2) हैं।

टिप्पणी : हम Q के निर्देशांक उसे PB का मध्य-बिंदु मानते हुए भी ज्ञात कर सकते थे। इसमें हमें मध्य-बिंदु वाले सूत्र का प्रयोग करना पड़ता।

उदाहरण 9 : बिंदुओं (5, –6) और (–1, –4) को जोड़ने वाले रेखाखंड को y-अक्ष किस अनुपात में विभाजित करती है? इस प्रतिच्छेद बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए वांछित अनुपात $k : 1$ है। तब, विभाजन सूत्र द्वारा, उस रेखाखंड को $k : 1$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक हैं : $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$

यह बिंदु y-अक्ष पर स्थित है और हम जानते हैं कि y-अक्ष पर भुज x का मूल्य शून्य (0) होता है।

अत:
$$\frac{-k+5}{k+1} = 0$$

इसलिए
$$k = 5 \text{ है।}$$

अर्थात् वांछित अनुपात 5 : 1 है। k का मान 5 रखने पर हमें प्रतिच्छेद बिंदु $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 10 : यदि बिंदु A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) और D(p, 3) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष इसी क्रम में हों, तो p का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

अत:, विकर्ण AC के मध्य बिंदु के निर्देशांक = विकर्ण BD के मध्य-बिंदु के निर्देशांक

अर्थात्
$$\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

या
$$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

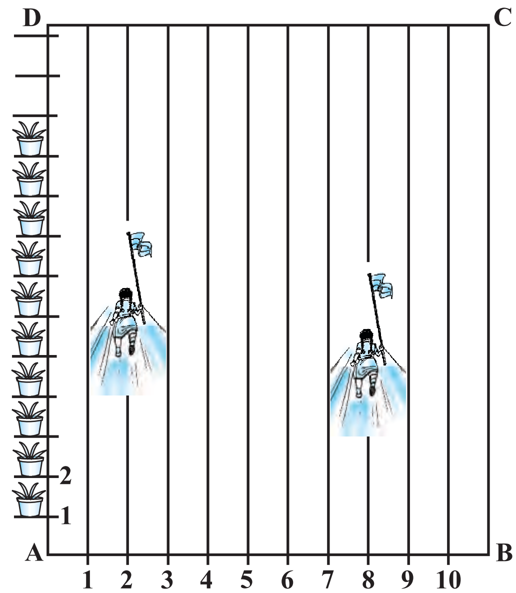
अत:
$$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

या
$$p = 7$$

प्रश्नावली 7.2

1. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं (–1, 7) और (4, –3) को मिलाने वाले रेखाखंड को 2 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है।
2. बिंदुओं (4, –1) और (–2, –3) को जोड़ने वाले रेखाखंड को सम-त्रिभाजित (Trisection) करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

3. आपके स्कूल में खेल-कूद क्रियाकलाप आयोजित करने के लिए, एक आयताकार मैदान ABCD में, चूने से परस्पर 1m की दूरी पर पंक्तियाँ बनाई गई हैं। AD के अनुदिश परस्पर 1m की दूरी पर 100 गमले रखे गए हैं, जैसा कि आकृति 7.12 में दर्शाया गया है। निहारिका दूसरी पंक्ति में AD के $\frac{1}{4}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक हरा झंडा गाड़ देती है। प्रीत आठवीं पंक्ति में AD के $\frac{1}{5}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक लाल झंडा गाड़ देती है। दोनों झंडों के बीच की दूरी क्या है? यदि रश्मि को एक नीला झंडा इन दोनों झंडों को मिलाने वाले रेखाखंड पर ठीक आधी दूरी (बीच में) पर गाड़ना हो तो उसे अपना झंडा कहाँ गाड़ना चाहिए?



आकृति 7.12

4. बिंदुओं (– 3, 10) और (6, – 8) को जोड़ने वाले रेखाखंड को बिंदु (– 1, 6) किस अनुपात में विभाजित करता है।

5. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिंदुओं A(1, – 5) और B(– 4, 5) को मिलाने वाला रेखाखंड x-अक्ष से विभाजित होता है। इस विभाजन बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

6. यदि बिंदु (1, 2), (4, y), (x, 6) और (3, 5), इसी क्रम में लेने पर, एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हो तो x और y ज्ञात कीजिए।

7. बिंदु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केंद्र (2, – 3) है तथा B के निर्देशांक (1, 4) हैं।

8. यदि A और B क्रमशः (– 2, – 2) और (2, – 4) हो तो बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ताकि $AP = \frac{3}{7} AB$ हो और P रेखाखंड AB पर स्थित हो।

9. बिंदुओं A(– 2, 2) और B(2, 8) को जोड़ने वाले रेखाखंड AB को चार बराबर भागों में विभाजित करने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

10. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में, (3, 0), (4, 5), (– 1, 4) और (– 2, – 1) हैं। [**संकेत :** समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (उसके विकर्णों का गुणनफल)]

7.4 त्रिभुज का क्षेत्रफल

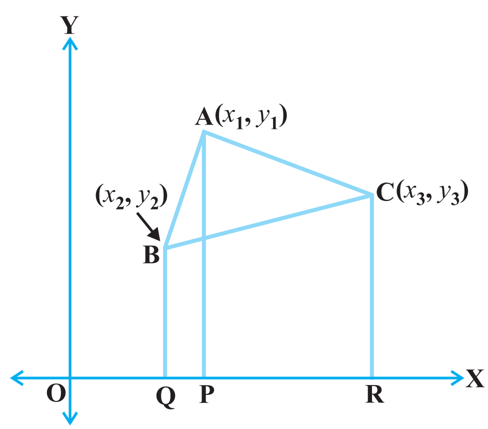
अपनी पिछली कक्षाओं में, आप यह पढ़ चुके हैं कि एक त्रिभुज का आधार और उसका संगत शीर्षलंब (ऊँचाई) दिए रहने पर, त्रिभुज का क्षेत्रफल किस प्रकार परिकलित किया जाता है। आपने निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया था:

$$\textbf{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \textbf{आधार} \times \textbf{शीर्षलंब}$$

कक्षा IX में, आपने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हीरोन (Heron) के सूत्र का भी अध्ययन किया था। अब यदि किसी त्रिभुज के तीनों शीर्षों के निर्देशांक दिए हों, तो क्या आप इसका क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

एक विधि यह हो सकती है कि आप दूरी सूत्र का प्रयोग करके त्रिभुज की तीनों भुजाएँ ज्ञात करें और फिर हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके क्षेत्रफल ज्ञात कर लें। परंतु यह विधि जटिल हो सकती है, विशेष रूप से तब जब भुजाएँ अपरिमेय संख्याओं के रूप में प्राप्त हो जाएँ। आइए देखें कि क्या इसकी कोई अन्य सरल विधि है।

मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है, जिसके शीर्ष $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ और $C(x_3, y_3)$ हैं। क्रमशः बिंदुओं A, B और C से x-अक्ष पर लंब AP, BQ और CR खींचिए। स्पष्टतः चतुर्भुज ABQP, APRC और BQRC समलंब हैं (देखिए आकृति 7.13)।



आकृति 7.13

अब, आकृति 7.13 से, यह स्पष्ट है कि

Δ ABC का क्षेत्रफल = समलंब ABQP का क्षेत्रफल + समलंब APRC का क्षेत्रफल – समलंब BQRC का क्षेत्रफल

आप यह भी जानते हैं कि

$$\text{एक समलंब का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\ (\text{समांतर भुजाओं का योग}) \times (\text{उनके बीच की दूरी})$$

अतः

$$\Delta\, ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}(BQ + AP)\, QP + \frac{1}{2}\,(AP + CR)\, PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)\, QR$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2)\right]$$

अतः, Δ ABC का क्षेत्रफल व्यंजक $\frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$

का संख्यात्मक मान है

आइए इस सूत्र का उपयोग दर्शाने के लिए, कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 11 : उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1, –1), (– 4, 6) और (–3, –5) है।

हल : शीर्षों A(1, –1), B(– 4, 6) और C (–3, –5) वाले त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल, उपरोक्त सूत्र द्वारा निम्नलिखित है:

$$\frac{1}{2}\left[1\,(6 + 5) + (-4)\,(-5 + 1) + (-3)\,(-1 - 6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(11 + 16 + 21) = 24$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल 24 वर्ग मात्रक है।

उदाहरण 12 : बिंदुओं A(5, 2), B(4, 7) और C (7, – 4) से बनने वाले ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : शीर्षों A(5, 2), B(4, 7) और C (7, – 4) वाले त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल है:

$$\frac{1}{2}\left[5\,(7 + 4) + 4\,(-4 - 2) + 7\,(2 - 7)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(55 - 24 - 35) = \frac{-4}{2} = -2$$

चूँकि क्षेत्रफल एक माप है, इसलिए यह ऋणात्मक नहीं हो सकता है। अतः, हम क्षेत्रफल के रूप – 2 का संख्यात्मक मान 2 लेंगे। इसलिए त्रिभुज का क्षेत्रफल 2 वर्ग मात्रक है।

उदाहरण 13 : बिंदुओं P(–1.5, 3), Q(6, –2) और R(–3, 4) से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए बिंदुओं से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल है:

$$\frac{1}{2}[-1.5(-2-4)+6(4-3)+(-3)(3+2)]$$

$$=\frac{1}{2}(9+6-15)=0$$

क्या हम 0 वर्ग मात्रक क्षेत्रफल वाला कोई त्रिभुज प्राप्त कर सकते हैं? इसका अर्थ क्या है? इसका अर्थ है कि यदि किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल 0 मात्रक हो, तो उसके शीर्ष संरेखी होंगे।

उदाहरण 14 : k का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिंदु A(2, 3), B(4, k) और C(6, –3) संरेखी हैं।

हल : चूँकि तीनों बिंदु संरेखी हैं, इसलिए इनसे बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 0 होगा। अर्थात्

$$\frac{1}{2}[2(k+3)+4(-3-3)+6(3-k)]=0$$

अर्थात् $\frac{1}{2}(-4k)=0$

या $k=0$

अतः, k का वांछित मान 0 है।

आइए अपने उत्तर की जाँच करें।

$$\Delta\, ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}[2(0+3)+4(-3-3)+6(3-0)]=0$$

उदाहरण 15 : यदि A(–5, 7), B(– 4, –5), C(–1, –6) और D(4, 5) एक चतुर्भुज ABCD के शीर्ष हैं, तो इस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : B को D से मिलाने पर, आपको दो त्रिभुज ABD और BCD प्राप्त होते हैं।

अब $$\Delta\, ABD \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}[-5(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)]$$

$$=\frac{1}{2}(50+8+48)=\frac{106}{2}=53 \text{ वर्ग मात्रक}$$

साथ ही, Δ BCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}[-4(-6-5) - 1(5+5) + 4(-5+6)]$

$= \frac{1}{2}(44 - 10 + 4) = 19$ वर्ग मात्रक

अतः, चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= 53 + 19 = 72$ वर्ग मात्रक

टिप्पणी : किसी बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, हम उसे ऐसे त्रिभुजों में बाँटते हैं, जिनमें कोई क्षेत्र सार्वनिष्ठ न हो और फिर इन सभी त्रिभुजों के क्षेत्रफलों को जोड़ लेते हैं।

प्रश्नावली 7.3

1. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष हैं :
   (i) $(2, 3), (-1, 0), (2, -4)$ (ii) $(-5, -1), (3, -5), (5, 2)$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में 'k' का मान ज्ञात कीजिए, ताकि तीनों बिंदु संरेखी हों :
   (i) $(7, -2), (5, 1), (3, k)$ (ii) $(8, 1), (k, -4), (2, -5)$

3. शीर्षों $(0, -1), (2, 1)$ और $(0, 3)$ वाले त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिंदुओं से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। इस क्षेत्रफल का दिए हुए त्रिभुज के क्षेत्रफल के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

4. उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में, $(-4, -2), (-3, -5), (3, -2)$ और $(2, 3)$ हैं।

5. कक्षा IX में आपने पढ़ा है (अध्याय 9, उदाहरण 3) कि किसी त्रिभुज की एक माध्यिका (Median) उसे बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों में विभाजित करती है। उस त्रिभुज ABC के लिए इस परिणाम का सत्यापन कीजिए जिसके शीर्ष $A(4, -6), B(3, -2)$ और $C(5, 2)$ हैं।

प्रश्नावली 7.4 (ऐच्छिक)*

1. बिंदुओं $A(2, -2)$ और $B(3, 7)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को रेखा $2x + y - 4 = 0$ जिस अनुपात में विभाजित करती है उसे ज्ञात कीजिए।

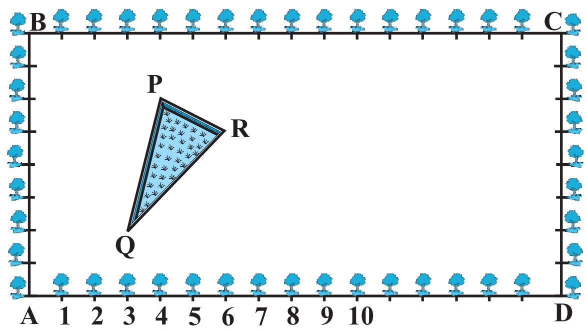
2. x और y में एक संबंध ज्ञात कीजिए, यदि बिंदु $(x, y), (1, 2)$ और $(7, 0)$ संरेखी हैं।

3. बिंदुओं $(6, -6), (3, -7)$ और $(3, 3)$ से होकर जाने वाले वृत्त का केंद्र ज्ञात कीजिए।

4. किसी वर्ग के दो सम्मुख (Opposite) शीर्ष $(-1, 2)$ और $(3, 2)$ हैं। वर्ग के अन्य दोनों शीर्ष ज्ञात कीजिए।

* यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

5. कृष्णानगर के एक सेकेंडरी स्कूल के कक्षा X के विद्यार्थियों को उनके बागवानी क्रियाकलाप के लिए, एक आयताकार भूखंड दिया गया है। गुलमोहर की पौध (sapling) को परस्पर 1m की दूरी पर इस भूखंड की परिसीमा (boundary) पर लगाया जाता है। इस भूखंड के अंदर एक त्रिभुजाकार घास लगा हुआ लॉन (lawn) है, जैसाकि आकृति 7.14 में दर्शाया गया है। विद्यार्थियों को भूखंड के शेष भाग में फूलों के पौधे के बीज बोने हैं।



आकृति 7.14

(i) A को मूलबिंदु मानते हुए, त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि मूलबिंदु C हो, तो Δ PQR के शीर्षों के निर्देशांक क्या होंगे?

साथ ही, उपरोक्त दोनों स्थितियों में, त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

6. एक त्रिभुज ABC के शीर्ष A(4, 6), B(1, 5) और C(7, 2) हैं। भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करते हुए एक रेखा इस प्रकार खींची गई है कि $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$ है। Δ ADE का क्षेत्रफल परिकलित कीजिए और इसकी तुलना Δ ABC के क्षेत्रफल से कीजिए। (प्रमेय 6.2 और प्रमेय 6.6 का स्मरण कीजिए।)

7. मान लीजिए A (4, 2), B(6, 5) और C(1, 4) एक त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं।

(i) A से होकर जाने वाली माध्यिका BC से D पर मिलती है। बिंदु D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(ii) AD पर स्थित ऐसे बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए कि AP : PD = 2 : 1 हो।

(iii) माध्यिकाओं BE और CF पर ऐसे बिंदुओं Q और R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए कि BQ : QE = 2 : 1 हो और CR : RF = 2 : 1 हो।

(iv) आप क्या देखते हैं?

[**नोट :** वह बिंदु जो तीनों माध्यिकाओं में सार्वनिष्ठ हो, उस त्रिभुज का *केंद्रक (centroid)* कहलाता है और यह प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।]

(v) यदि A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) और C(x_3, y_3) त्रिभुज ABC के शीर्ष हैं, तो इस त्रिभुज के केंद्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

8. बिंदुओं A(–1, –1), B(–1, 4), C(5, 4) और D(5, –1) से एक आयत ABCD बनता है। P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिंदु हैं। क्या चतुर्भुज PQRS एक वर्ग है? क्या यह एक आयत है? क्या यह एक समचतुर्भुज है? सकारण उत्तर दीजिए।

7.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ है।

2. बिंदु $P(x, y)$ की मूलबिंदु से दूरी $\sqrt{x^2 + y^2}$ होती है।

3. उस बिंदु $P(x, y)$ के निर्देशांक जो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को $m_1 : m_2$ के अनुपात में आंतरिक रूप से विभाजित करता है, निम्नलिखित होते हैं:

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

4. बिंदुओं $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड PQ के मध्यबिंदु के निर्देशांक $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ होते हैं।

5. बिंदुओं (x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

व्यंजक $$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

का संख्यात्मक मान होता है।

पाठकों के लिए विशेष

अनुभाग 7.3 में किसी बिंदु P के लिए जिसके निर्देशांक (x, y) हैं तथा यदि यह बिंदु किन्हीं दो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को आंतरिक रूप में $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करता है तो

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

ध्यान दीजिए कि $PA : PB = m_1 : m_2$

तथापि यदि बिंदु P बिंदुओं A और B के बीच स्थित नहीं है, परंतु यह रेखाखंड के वाह्य रेखा AB पर स्थित है जहाँ $PA : PB = m_1 : m_2$ है तब हम कहते हैं कि P बिंदुओं A और B को मिलाने वाले रेखाखंड को वाह्यत: (externally) विभाजित करता है। ऐसी स्थितियों से संबंधित विभाजन सूत्र का अध्ययन आप उच्चतर कक्षाओं में करेंगे।

त्रिकोणमिति का परिचय (Introduction to Trigonometry) 8

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.

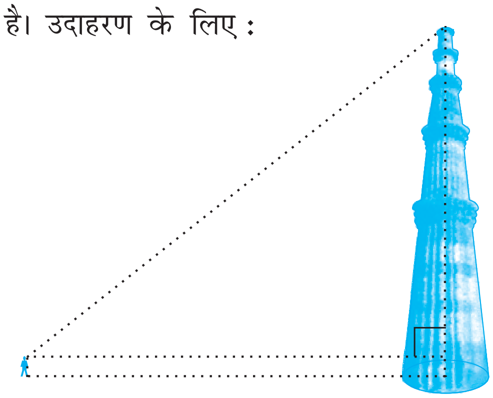
(संभवत: त्रिकोणमिति के अतिरिक्त गणित की कोई ऐसी शाखा नहीं है, जो उसकी मध्य स्थिति का स्थान ले सके।)

– J.F. Herbart (1890)

8.1 भूमिका

आप अपनी पिछली कक्षाओं में त्रिभुजों, विशेष रूप से समकोण त्रिभुजों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। आइए हम अपने आस-पास के परिवेश से कुछ ऐसे उदाहरण लें, जहाँ समकोण त्रिभुजों के बनने की कल्पना की जा सकती है। उदाहरण के लिए :

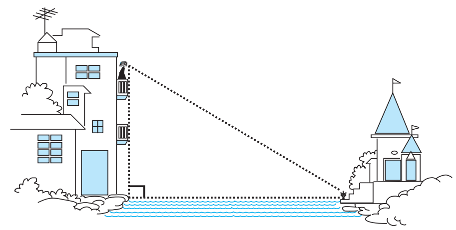
1. मान लीजिए एक स्कूल के छात्र कुतुबमीनार देखने गए हैं। अब, यदि कोई छात्र मीनार के शिखर को देख रहा हो, तो एक समकोण त्रिभुज बनने की कल्पना की जा सकती है जैसाकि आकृति 8.1 में दिखाया गया है। क्या वास्तव में मापे बिना ही छात्र मीनार की ऊँचाई ज्ञात कर सकता है?



आकृति 8.1

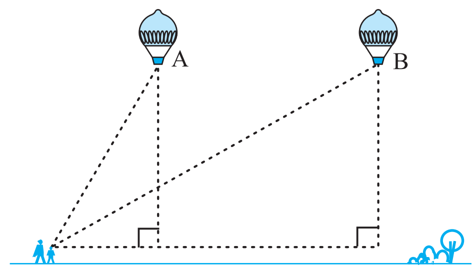
2. मान लीजिए एक लड़की नदी के किनारे स्थित अपने मकान की बालकनी पर बैठी हुई है और वह इस नदी के दूसरे किनारे पर स्थित पास ही के मंदिर की एक निचली सीढ़ी पर रखे गमले को देख रही है। इस स्थिति में, एक समकोण त्रिभुज बनने की

कल्पना की जा सकती है जैसाकि आकृति 8.2 में दिखाया गया है, यदि आपको वह ऊँचाई ज्ञात हो, जिस पर लड़की बैठी हुई है, तो क्या आप नदी की चौड़ाई ज्ञात कर सकते हैं?



आकृति 8.2

3. मान लीजिए एक गर्म हवा वाला गुब्बारा हवा में उड़ रहा है। आसमान में उड़ने पर इस गुब्बारे को एक लड़की देख लेती है और इस बात को बताने के लिए वह अपनी माँ के पास दौड़कर जाती है। गुब्बारे को देखने के लिए उसकी माँ तुरंत घर से बाहर निकल आती है। अब मान लीजिए कि जब पहले-पहल लड़की गुब्बारे को देखती है, तब गुब्बारा बिंदु A पर था। जब माँ-बेटी दोनों ही गुब्बारे को देखने के लिए बाहर निकलकर आती हैं तब तक गुब्बारा एक अन्य बिंदु B तक आ चुका होता है। क्या आप जमीन के उस स्थान से, जहाँ माँ और बेटी दोनों खड़ी हैं, B की ऊँचाई ज्ञात कर सकते हैं?



आकृति 8.3

ऊपर बताई गई सभी स्थितियों में दूरियाँ अथवा ऊँचाईयाँ कुछ गणितीय तकनीकों को, जो त्रिकोणमिति नामक गणित की एक शाखा के अंतर्गत आते हैं, लागू करके ज्ञात किया जा सकता है। अंग्रेजी शब्द 'trigonometry' की व्युत्पत्ति ग्रीक शब्दों 'tri' (जिसका अर्थ है तीन), 'gon' (जिसका अर्थ है, भुजा) और 'metron' (जिसका अर्थ है माप) से हुई है। वस्तुत: **त्रिकोणमिति** में एक त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच के संबंधों का अध्ययन किया जाता है। प्राचीन काल में त्रिकोणमिति पर किए गए कार्य का उल्लेख मिस्र और बेबीलॉन में मिलता है। प्राचीन काल के खगोलविद् त्रिकोणमिति का प्रयोग पृथ्वी से तारों और ग्रहों की दूरियाँ मापने में करते थे। आज भी इंजीनियरिंग और भौतिक विज्ञान में प्रयुक्त अधिकांश प्रौद्योगिकीय उन्नत विधियाँ त्रिकोणमितीय संकल्पनाओं पर आधारित हैं।

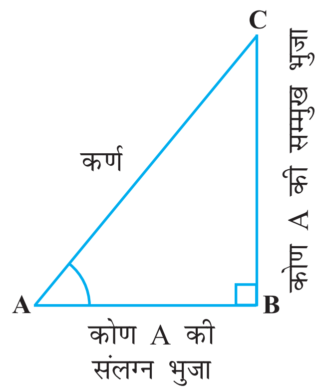
इस अध्याय में हम एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं के कुछ अनुपातों का उसके न्यून कोणों के सापेक्ष अध्ययन करेंगे जिन्हें **कोणों के त्रिकोणमितीय** (Trigonometric) **अनुपात** कहते हैं। यहाँ हम अपनी चर्चा केवल न्यून कोणों तक ही सीमित रखेंगे। यद्यपि इन अनुपातों

का विस्तार दूसरे कोणों के लिए भी किया जा सकता है। यहाँ हम 0° और 90° के माप वाले कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों को भी परिभाषित करेंगे। हम कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित करेंगे और इन अनुपातों से संबंधित कुछ सर्वसमिकाएँ (identities), जिन्हें **त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ** कहा जाता है, स्थापित करेंगे।

8.2 त्रिकोणमितीय अनुपात

अनुच्छेद 8.1 में आप विभिन्न स्थितियों में बने कुछ समकोण त्रिभुजों की कल्पना कर चुके हैं।

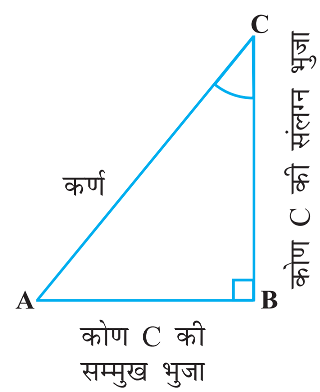
आइए हम एक समकोण त्रिभुज ABC लें, जैसाकि आकृति 8.4 में दिखाया गया है।



आकृति 8.4

यहाँ, ∠CAB (या संक्षेप में कोण A) एक न्यून कोण है। कोण A के सापेक्ष भुजा BC की स्थिति पर ध्यान दीजिए। यह भुजा कोण A के सामने है। इस भुजा को हम कोण A की *सम्मुख भुजा* कहते हैं, भुजा AC समकोण त्रिभुज का *कर्ण* है और भुजा AB, ∠A का एक भाग है। अत: इसे हम कोण A की *संलग्न भुजा* कहते हैं।

ध्यान दीजिए कि कोण A के स्थान पर कोण C लेने पर भुजाओं की स्थिति बदल जाती है। (देखिए आकृति 8.5)



आकृति 8.5

पिछली कक्षाओं में आप "अनुपात" की संकल्पना के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। यहाँ अब हम समकोण त्रिभुज की भुजाओं से संबंधित कुछ अनुपातों को, जिन्हें हम त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं, परिभाषित करेंगे।

समकोण त्रिभुज ABC (देखिए आकृति 8.4) के कोण A के **त्रिकोणमितीय अनुपात** निम्न प्रकार से परिभाषित किए जाते हैं:

$$\angle A \text{ का sine} = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A \text{ का cosine} = \frac{\text{कोण A की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\angle A \text{ का tangent} = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण A की संलग्न भुजा}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\angle A \text{ का cosecant} = \frac{1}{\angle A \text{ का sine}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle A \text{ का secant} = \frac{1}{\angle A \text{ का cosine}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण A की संलग्न भुजा}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\angle A \text{ का cotangent} = \frac{1}{\angle A \text{ का tangent}} = \frac{\text{कोण A की संलग्न भुजा}}{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}} = \frac{AB}{BC}$$

ऊपर परिभाषित किए गए अनुपातों को संक्षेप में क्रमश: sin A, cos A, tan A, cosec A, sec A और cot A लिखा जाता है। ध्यान दीजिए कि अनुपात **cosec A, sec A और cot A** अनुपातों sin A, cos A और tan A के क्रमश: व्युत्क्रम होते हैं।

और आप यहाँ यह भी देख सकते हैं कि $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$ और $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

अत: एक समकोण त्रिभुज के एक न्यून कोण के **त्रिकोणमितीय अनुपात** त्रिभुज के कोण और उसकी भुजाओं की लंबाई के बीच के संबंध को व्यक्त करते हैं।

क्यों न यहाँ आप एक समकोण त्रिभुज के कोण C के त्रिकोणमितीय अनुपातों को परिभाषित करने का प्रयास करें (देखिए आकृति 8.5)?

शब्द **"sine"** का सबसे पहला प्रयोग जिस रूप में आज हम करते हैं उसका उल्लेख 500 ई. में आर्यभट्ट द्वारा लिखित पुस्तक आर्यभटीयम में मिलता है। आर्यभट्ट ने शब्द **अर्ध-ज्या** का प्रयोग अर्ध-जीवा के लिए किया था जिसने समय-अंतराल में **ज्या** या **जीवा** का संक्षिप्त रूप ले लिया। जब पुस्तक *आर्यभटीयम* का अनुवाद अरबी भाषा में किया गया, तब शब्द जीवा को यथावत रख लिया गया। शब्द जीवा को साइनस (Sinus) के रूप में अनूदित किया गया, जिसका अर्थ वक्र है, जबकि अरबी रूपांतर को लैटिन में अनूदित किया

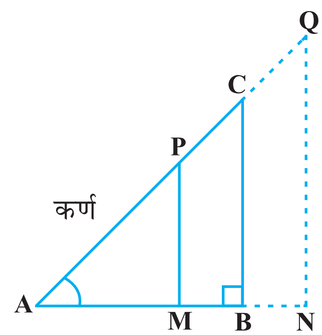
476 – 550 ई.

गया। इसके तुरंत बाद sine के रूप में प्रयुक्त शब्द sinus भी पूरे यूरोप में गणितीय पाठों में प्रयुक्त होने लगा। खगोलविद् के एक अंग्रेजी प्रोफ़ेसर एडमंड गुंटर (1581–1626) ने पहले-पहल संक्षिप्त संकेत ***'sin'*** का प्रयोग किया था।

शब्दों **'cosine'** और **'tangent'** का उद्गम बहुत बाद में हुआ था। **cosine** फलन का उद्गम पूरक कोण के **sine** का अभिकलन करने को ध्यान में रखकर किया गया था। आर्यभट्ट ने इसे कोटिज्या का नाम दिया था। नाम ***cosinus*** का उद्गम एडमंड गुंटर के साथ हुआ था। 1674 में अंग्रेज गणितज्ञ सर जोनास मूरे ने पहले-पहल संक्षिप्त संकेत ***'cos'*** का प्रयोग किया था।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि प्रतीक sin A का प्रयोग कोण A' के sin के संक्षिप्त रूप में किया गया है। यहाँ sinA, sin और A का गुणनफल नहीं है। A से अलग रहकर 'sin' का कोई अर्थ ही नहीं होता। इसी प्रकार cosA, 'cos' और A का गुणनफल नहीं है। इस प्रकार की व्याख्या अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के साथ भी की जाती है।

अब, यदि हम समकोण त्रिभुज ABC के कर्ण AC पर एक बिंदु P लें या बढ़ी हुई भुजा AC पर बिंदु Q लें और AB पर लंब PM डालें और बढ़ी हुई भुजा AB पर लंब QN डालें (देखिए आकृति 8.6), तो Δ PAM के $\angle$ A के त्रिकोणमितीय अनुपातों और Δ QAN के $\angle$ A के त्रिकोणमितीय अनुपातों में क्या अंतर होगा?



आकृति 8.6

इस प्रश्न का उत्तर ज्ञात करने के लिए आइए पहले हम इन त्रिभुजों को देखें। क्या Δ PAM और Δ CAB समरूप हैं? आपको याद होगा कि अध्याय 6 में आप AA समरूपता कसौटी के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। इस कसौटी को लागू करने पर आप पाएँगे कि त्रिभुज PAM और CAB समरूप हैं। अत: समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म के अनुसार इन त्रिभुजों की संगत भुजाएँ आनुपातिक हैं।

अत: $$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}$$

इससे हमें यह प्राप्त होता है $$\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$$

इसी प्रकार $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A, \ \frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$ आदि-आदि

इससे यह पता चलता है कि Δ PAM के कोण A के त्रिकोणमितीय अनुपात और ΔCAB के कोण A के त्रिकोणमितीय अनुपातों में कोई अंतर नहीं होता।

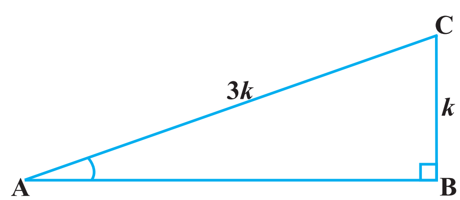
इसी प्रकार आप यह जाँच कर सकते हैं कि Δ QAN में भी sinA का मान (और अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान) समान बना रहता है।

अपने प्रेक्षणों से अब यह स्पष्ट हो जाता है कि **यदि कोण समान बना रहता हो, तो एक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मानों में त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयों के साथ कोई परिवर्तन नहीं होता।**

टिप्पणी : सुविधा के लिए $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$, आदि के स्थान पर हम क्रमशः $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ आदि लिख सकते हैं। परंतु $\text{cosec } A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ (इसे साइन इनवर्स A कहा जाता है)। $\sin^{-1} A$ का एक अलग अर्थ होता है जिस पर चर्चा हम उच्च कक्षाओं में करेंगे। इसी प्रकार की परंपराएँ अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों पर भी लागू होती हैं। कभी-कभी ग्रीक अक्षर θ (थीटा) का प्रयोग कोण को प्रकट करने के लिए किया जाता है।

यहाँ हमने एक न्यून कोण के छः त्रिकोणमितीय अनुपात परिभाषित किए हैं। यदि हमें कोई एक अनुपात ज्ञात हो, तो क्या हम अन्य अनुपात प्राप्त कर सकते हैं? आइए हम इस पर विचार करें।

यदि एक समकोण त्रिभुज ABC में $\sin A = \frac{1}{3}$, तब इसका अर्थ यह है कि $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$, अर्थात् त्रिभुज ABC की भुजाओं BC और AC की लंबाइयाँ 1 : 3 के अनुपात में हैं (देखिए आकृति 8.7)। अतः यदि BC, k के बराबर हो, तो AC, $3k$ के बराबर होगी, जहाँ k एक धन संख्या है। कोण A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करने के लिए हमें तीसरी भुजा AB की लंबाई ज्ञात करनी होती है। क्या आपको पाइथागोरस प्रमेय याद है? आइए हम पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से अपेक्षित लंबाई AB ज्ञात करें।



आकृति 8.7

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}\,k)^2$$

अतः $AB = \pm 2\sqrt{2}\,k$

अतः हमें प्राप्त होता है $AB = 2\sqrt{2}\,k$ (AB क्यों $-2\sqrt{2}\,k$ नहीं है?)

अब $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}\,k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

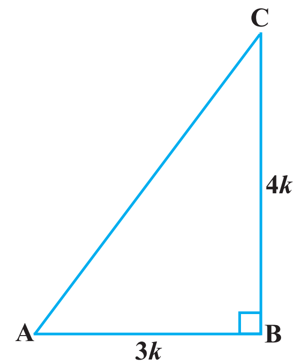
इसी प्रकार, आप कोण A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात प्राप्त कर सकते हैं।

टिप्पणी : क्योंकि समकोण त्रिभुज का कर्ण, त्रिभुज की सबसे लंबी भुजा होता है, इसलिए sin A या cos A का मान सदा ही 1 से कम होता है (या विशेष स्थिति में 1 के बराबर होता है।)

आइए अब हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : यदि $\tan A = \frac{4}{3}$, तो कोण A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : आइए सबसे पहले हम एक समकोण Δ ABC खींचें (देखिए आकृति 8.8)।



आकृति 8.8

अब, हम जानते हैं कि $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$

अतः यदि BC = $4k$, तब AB = $3k$, जहाँ k धन संख्या है।

अब पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

इसलिए $AC = 5k$

अब हम इनकी परिभाषाओं की सहायता से सभी त्रिकोणमितीय अनुपात लिख सकते हैं।

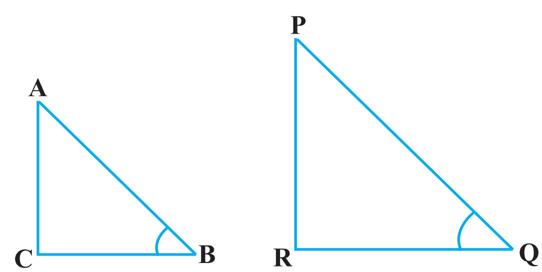
$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

अतः $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$ और $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$

उदाहरण 2 : यदि $\angle$ B और $\angle$ Q ऐसे न्यूनकोण हों जिससे कि sin B = sin Q, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle B = \angle Q$

हल : आइए हम दो समकोण त्रिभुज ABC और PQR लें, जहाँ sin B = sin Q (देखिए आकृति 8.9)।



आकृति 8.9

यहाँ $$\sin B = \frac{AC}{AB}$$

और $$\sin Q = \frac{PR}{PQ}$$

तब $$\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$$

अत: $$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k \text{ (मान लीजिए)} \quad (1)$$

अब, पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर हमें ये प्राप्त होते हैं

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

और $$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

अत: $$\frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{\sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k \quad (2)$$

(1) और (2) से हमें यह प्राप्त होता है

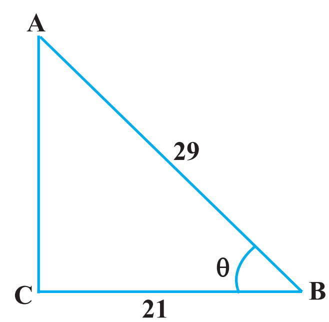
$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

तब प्रमेय 6.4 का प्रयोग करने पर Δ ACB ~ Δ PRQ प्राप्त होता है। अत: $\angle$ B = $\angle$ Q

उदाहरण 3 : Δ ACB लीजिए जिसका कोण C समकोण है जिसमें AB = 29 इकाई, BC = 21 इकाई और $\angle ABC = \theta$ (देखिए आकृति 8.10) हैं तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$

(ii) $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$.



आकृति 8.10

हल : Δ ACB में हमें यह प्राप्त होता है

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

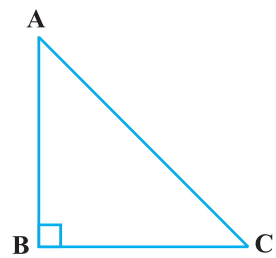
$$= \sqrt{(29-21)(29+21)} = \sqrt{(8)(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ इकाई}$$

अतः $\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}, \cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}\cdot$

अब, (i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{20^2 + 21^2}{29^2} = \frac{400+441}{841} = 1,$

और (ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}$

उदाहरण 4 : एक समकोण त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = 1$ तो सत्यापित कीजिए कि $2\sin A\cos A = 1$



आकृति 8.11

हल : Δ ABC में $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$ (देखिए आकृति 8.11)

अर्थात् $BC = AB$

मान लीजिए $AB = BC = k$, जहाँ k एक धन संख्या है।

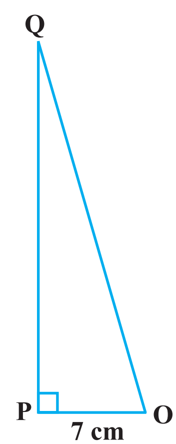
अब $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$

अतः $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ और $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

इसलिए $2\sin A\cos A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1,$ जो कि अपेक्षित मान है।

उदाहरण 5 : Δ OPQ में, जिसका कोण P समकोण है, OP = 7 cm और OQ – PQ = 1 cm (देखिए आकृति 8.12), sin Q और cos Q के मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 8.12

हल : Δ OPQ से हमें यह प्राप्त है कि

$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

अर्थात् $(1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (क्यों?)

अर्थात् $1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

अर्थात् $1 + 2PQ = 7^2$ (क्यों?)

अर्थात् $PQ = 24$ cm और $OQ = 1 + PQ = 25$ cm

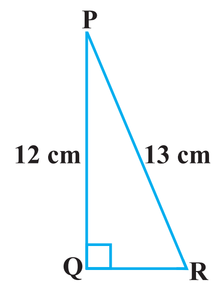
अत: $\sin Q = \frac{7}{25}$ और $\cos Q = \frac{24}{25}$

प्रश्नावली 8.1

1. ΔABC में, जिसका कोण B समकोण है, $AB = 24$ cm और $BC = 7$ cm है। निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin A, \cos A$

(ii) $\sin C, \cos C$



आकृति 8.13

2. आकृति 8.13 में, $\tan P - \cot R$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\sin A = \frac{3}{4}$, तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान परिकलित कीजिए।

4. यदि $15 \cot A = 8$ हो तो $\sin A$ और $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\sec \theta = \frac{13}{12}$, हो तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित कीजिए।

6. यदि $\angle A$ और $\angle B$ न्यून कोण हो, जहाँ $\cos A = \cos B$, तो दिखाइए कि $\angle A = \angle B$

7. यदि $\cot \theta = \frac{7}{8}$, तो (i) $\frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$, (ii) $\cot^2 \theta$ का मान निकालिए?

8. यदि $3 \cot A = 4$, तो जाँच कीजिए कि $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है या नहीं।

9. त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$ (ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

10. ΔPQR में, जिसका कोण Q समकोण है, $PR + QR = 25$ cm और $PQ = 5$ cm है। $\sin P, \cos P$ और $\tan P$ के मान ज्ञात कीजिए।

11. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) $\tan A$ का मान सदैव 1 से कम होता है।

(ii) कोण A के किसी मान के लिए $\sec A = \frac{12}{5}$

(iii) $\cos A$, कोण A के cosecant के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।

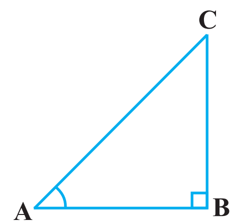
(iv) $\cot A$, cot और A का गुणनफल होता है।

(v) किसी भी कोण θ के लिए $\sin \theta = \frac{4}{3}$

8.3 कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

ज्यामिति के अध्ययन से आप 30°, 45°, 60° और 90° के कोणों की रचना से आप अच्छी तरह से परिचित हैं। इस अनुच्छेद में हम इन कोणों और साथ ही 0° वाले कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात करेंगे।

45° के त्रिकोणमितीय अनुपात



आकृति 8.14

Δ ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि एक कोण 45° का हो, तो अन्य कोण भी 45° का होगा अर्थात् $\angle A = \angle C = 45°$ (देखिए आकृति 8.14)।

अत: $\qquad BC = AB \qquad$ (क्यों?)

अब मान लीजिए $BC = AB = a$

तब पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

इसलिए $\qquad AC = a\sqrt{2}\cdot$

त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषाओं को लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

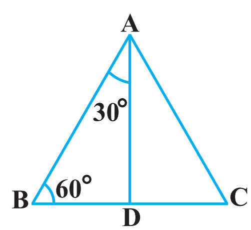
$$\sin 45° = \frac{45° \text{ के कोण की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{45° \text{ के कोण की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{45° \text{ के कोण की सम्मुख भुजा}}{45° \text{ के कोण की संलग्न भुजा}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

और $\quad \text{cosec } 45° = \frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$, $\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$, $\cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = 1$

30° और 60° के त्रिकोणमितीय अनुपात



आकृति 8.15

आइए, अब हम 30° और 60° के त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित करें। एक समबाहु त्रिभुज ABC पर विचार करें। क्योंकि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण, 60° का होता है, इसलिए $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

A से भुजा BC पर लंब AD डालिए (देखिए आकृति 8.15)।

अब $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (क्यों?)

इसलिए $BD = DC$

और $\angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)

अब आप यह देख सकते हैं कि:

ΔABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण D समकोण है, और जहाँ $\angle BAD = 30°$ और $\angle ABD = 60°$ (देखिए आकृति 8.15)।

जैसा कि आप जानते हैं, कि त्रिकोणमितीय अनुपातों को ज्ञात करने के लिए हमें त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। आइए, हम यह मान लें कि $AB = 2a$

तब $$BD = \frac{1}{2}BC = a$$

और $$AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$$

इसलिए $$AD = a\sqrt{3}$$

अब $$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},\ \cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

और $$\text{cosec } 30° = \frac{1}{\sin 30°} = 2,\quad \sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \sqrt{3}$$

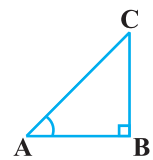
इसी प्रकार

$$\sin 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60° = \frac{1}{2},\ \tan 60° = \sqrt{3}$$

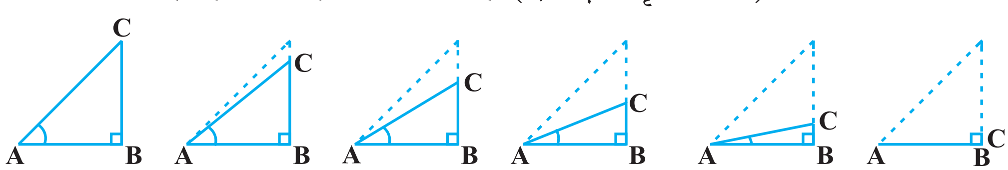
$\text{cosec } 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sec 60° = 2$ और $\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

0° और 90° के त्रिकोणमितीय अनुपात

आइए, हम देखें कि यदि समकोण त्रिभुज ABC के कोण A को तब तक और छोटा किया जाए जब तक कि यह शून्य नहीं हो जाता है, तब इस स्थिति में कोण A के त्रिकोणमितीय अनुपातों पर क्या प्रभाव पड़ता है (देखिए आकृति 8.16)। जैसे-जैसे $\angle A$ छोटा होता जाता है, वैसे-वैसे भुजा BC की लंबाई कम होती जाती है। बिंदु C, बिंदु B के निकट आता जाता है और अंत में, जब $\angle A$, 0° के काफी निकट हो जाता है तब AC लगभग वही हो जाता है जो कि AB है (देखिए आकृति 8.17)।



आकृति 8.16



आकृति 8.17

जब $\angle A$, 0° के अत्यधिक निकट होता है तब BC, 0 के अत्यधिक निकट आ जाता है। तब $\sin A = \frac{BC}{AC}$ का मान 0 के अत्यधिक निकट आ जाता है। और, जब $\angle A$, 0° के अत्यधिक निकट होता है, तब AC लगभग वही होता है जो कि AB होता है और $\cos A = \frac{AB}{AC}$ का मान 1 के अत्यधिक समीप होता है।

इसकी सहायता से हम उस स्थिति में sin A और cos A के मान परिभाषित कर सकते हैं जबकि A = 0°, हम **sin 0° = 0 और cos 0° = 1** परिभाषित करते हैं।

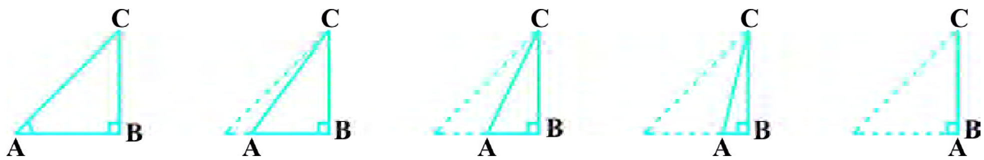
इनका प्रयोग करने पर हमें ये प्राप्त होते हैं:

$\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = 0$, $\cot 0° = \frac{1}{\tan 0°}$, जो कि परिभाषित नहीं है (क्यों?)

$\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = 1$ तथा $\text{cosec } 0° = \frac{1}{\sin 0°}$, और यह भी परिभाषित नहीं है। (क्यों?)

आइए अब हम उस स्थिति में देखें कि $\angle A$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों के साथ क्या होता है जबकि ΔABC के इस कोण को तब तक बड़ा किया जाता है, जब तक कि 90° का नहीं हो जाता। $\angle A$ जैसे-जैसे बड़ा होता जाता है, $\angle C$ वैसे-वैसे छोटा होता जाता है। अतः ऊपर वाली स्थिति की भाँति भुजा AB की लंबाई कम होती जाती है। बिंदु A, बिंदु B के निकट होता जाता है और, अंत में जब $\angle A$, 90° के अत्यधिक निकट आ जाता है, तो $\angle C$, 0° के

अत्यधिक निकट आ जाता है और भुजा AC भुजा BC के साथ लगभग संपाती हो जाती है (देखिए आकृति 8.18)।



आकृति 8.18

जब $\angle C$, 0° के अत्यधिक निकट होता है तो $\angle A$, 90° के अत्यधिक निकट हो जाता है और भुजा AC लगभग वही हो जाती है, जो भुजा BC है। अत: sin A, 1 के अत्यधिक निकट हो जाता है और, जब $\angle A$, 90° के अत्यधिक निकट होता है, तब $\angle C$, 0° के अत्यधिक निकट हो जाता है और भुजा AB लगभग शून्य हो जाती है। अत: cos A, 0 के अत्यधिक निकट हो जाता है।

अत: हम यह परिभाषित करते हैं : **sin 90° = 1 और cos 90° = 0**

अब आप क्यों नहीं 90° के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करते हैं?

अब हम तुरंत संदर्भ के लिए एक सारणी 8.1 के रूप में 0°, 30°, 45°, 60° और 90° के सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान प्रस्तुत करेंगे।

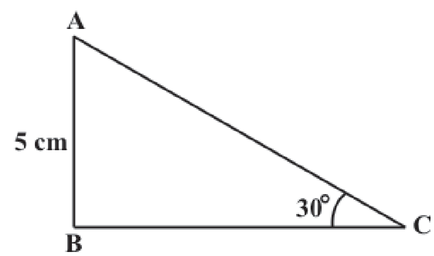
सारणी 8.1

$\angle A$	0°	30°	45°	60°	90°
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित
cosec A	अपरिभाषित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाषित
cot A	अपरिभाषित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

टिप्पणी : उपर्युक्त सारणी से आप देख सकते हैं कि जैसे-जैसे $\angle A$ का मान $0°$ से $90°$ तक बढ़ता जाता है, sin A का मान 0 से बढ़कर 1 हो जाता है और cos A का मान 1 से घटकर 0 हो जाता है।

आइए, अब हम कुछ उदाहरण लेकर ऊपर की सारणी में दिए गए मानों के प्रयोग को प्रदर्शित करें।

उदाहरण 6 : Δ ABC में जिसका कोण B समकोण है, AB = 5 cm और $\angle ACB = 30°$ (देखिए आकृति 8.19)। भुजाओं BC और AC की लंबाइयाँ ज्ञात करें।



आकृति 8.19

हल : भुजा BC की लंबाई ज्ञात करने के लिए हम उस त्रिकोणमितीय अनुपात को लेंगे जिसमें BC और दी हुई भुजा AB हो। क्योंकि BC कोण C की संलग्न भुजा है, और AB कोण C की सम्मुख भुजा है, इसलिए

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

अर्थात् $$\frac{5}{BC} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

जिससे $$BC = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$ प्राप्त होता है।

भुजा AC की लंबाई ज्ञात करने के लिए हम

$$\sin 30° = \frac{AB}{AC}$$ लेते हैं (क्यों?)

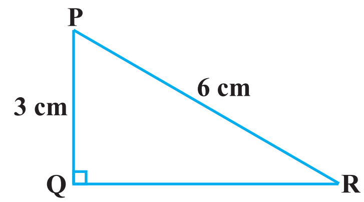
अर्थात् $$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

अर्थात् $$AC = 10 \text{ cm}$$

ध्यान दीजिए कि ऊपर के उदाहरण में तीसरी भुजा की लंबाई ज्ञात करने के लिए विकल्प के रूप में हम पाइथागोरस प्रमेय को लागू कर सकते थे,

अर्थात् $$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

उदाहरण 7 : Δ PQR में, जिसका कोण Q समकोण है (देखिए आकृति 8.20), PQ = 3 cm और PR = 6 cm है। $\angle$ QPR और $\angle$ PRQ ज्ञात कीजिए।



आकृति 8.20

हल : दिया हुआ है PQ = 3 cm और PR = 6 cm

इसलिए $$\frac{PQ}{PR} = \sin R$$

या $$\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

अत: $$\angle PRQ = 30°$$

और, इसलिए $$\angle QPR = 60° \quad \text{(क्यों?)}$$

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि यदि एक समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कोई एक अन्य भाग (जो या तो न्यून कोण हो या कोई एक भुजा हो) ज्ञात हो, तो त्रिभुज की शेष भुजाएँ और कोण ज्ञात किए जा सकते हैं।

उदाहरण 8 : यदि $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$, $0° < A + B \le 90°$, $A > B$, तो A और B ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$, इसलिए, $A - B = 30°$ (क्यों?) (1)

और, क्योंकि $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$, इसलिए, $A + B = 60°$ (क्यों?) (2)

(1) और (2) को हल करने पर हमें $A = 45°$ और $B = 15°$ प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 8.2

1. निम्नलिखित के मान निकालिए :

(i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$

(ii) $2 \tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

(iii) $\dfrac{\cos 45°}{\sec 30° + \text{cosec } 30°}$

(iv) $\dfrac{\sin 30° + \tan 45° - \text{cosec } 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$

(v) $\dfrac{5 \cos^2 60° + 4 \sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$

2. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिए:

(i) $\dfrac{2 \tan 30°}{1 + \tan^2 30°} =$

(A) sin 60° (B) cos 60° (C) tan 60° (D) sin 30°

(ii) $\dfrac{1 - \tan^2 45°}{1 + \tan^2 45°} =$

(A) tan 90° (B) 1 (C) sin 45° (D) 0

(iii) sin 2A = 2 sin A तब सत्य होता है, जबकि A बराबर है:

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

(iv) $\dfrac{2 \tan 30°}{1 - \tan^2 30°}$ बराबर है:

(A) cos 60° (B) sin 60° (C) tan 60° (D) sin 30°

3. यदि $\tan (A + B) = \sqrt{3}$ और $\tan (A - B) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $0° < A + B \le 90°$; $A > B$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

4. बताइए कि निम्नलिखित में कौन-कौन सत्य हैं या असत्य हैं। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) sin (A + B) = sin A + sin B.

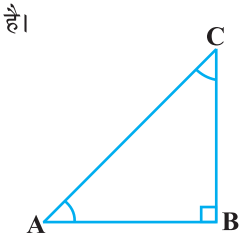
(ii) θ में वृद्धि होने के साथ sin θ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iii) θ में वृद्धि होने के साथ cos θ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iv) θ के सभी मानों पर sin θ = cos θ

(v) A = 0° पर cot A परिभाषित नहीं है।

8.4 पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात



आकृति 8.21

आपको याद होगा कि दो कोणों को पूरक कोण तब कहा जाता है जबकि उनका योग 90° के बराबर होता है।

Δ ABC में, जिसका कोण B समकोण है, क्या आपको पूरक कोणों का कोई युग्म दिखाई पड़ता है (देखिए आकृति 8.21)।

क्योंकि ∠ A + ∠ C = 90°, अत: इनसे पूरक कोणों का एक युग्म बनता है। हम जानते हैं कि

$$\left.\begin{array}{lll} \sin A = \dfrac{BC}{AC} & \cos A = \dfrac{AB}{AC} & \tan A = \dfrac{BC}{AB} \\ \text{cosec } A = \dfrac{AC}{BC} & \sec A = \dfrac{AC}{AB} & \cot A = \dfrac{AB}{BC} \end{array}\right\} \quad (1)$$

आइए, अब हम $\angle C = 90° - \angle A$ के त्रिकोणमितीय अनुपात लिखें।

सुविधा के लिए हम $90° - \angle A$ के स्थान पर $90° - A$ लिखेंगे।

कोण $90° - A$ की सम्मुख भुजा और संलग्न भुजा क्या होगी?

आप देखेंगे कि AB कोण $90° - A$ की सम्मुख भुजा है और BC संलग्न भुजा है। अतः

$$\left.\begin{aligned} \sin(90° - A) &= \frac{AB}{AC}, \quad \cos(90° - A) = \frac{BC}{AC}, \quad \tan(90° - A) = \frac{AB}{BC} \\ \operatorname{cosec}(90° - A) &= \frac{AC}{AB}, \quad \sec(90° - A) = \frac{AC}{BC}, \quad \cot(90° - A) = \frac{BC}{AB} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

अब (1) और (2) के अनुपातों की तुलना करने पर हम यह पाते हैं कि

$$\sin(90° - A) = \frac{AB}{AC} = \cos A \text{ और } \cos(90° - A) = \frac{BC}{AC} = \sin A.$$

और $$\tan(90° - A) = \frac{AB}{BC} = \cot A, \quad \cot(90° - A) = \frac{BC}{AB} = \tan A$$

$$\sec(90° - A) = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} A, \quad \operatorname{cosec}(90° - A) = \frac{AC}{AB} = \sec A$$

अतः **$\sin(90° - A) = \cos A$, $\cos(90° - A) = \sin A$.**

$\tan(90° - A) = \cot A$, $\cot(90° - A) = \tan A$

$\sec(90° - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90° - A) = \sec A$

जहाँ कोण A के सभी मान 0° और 90° के बीच स्थित हैं। बताइए कि यह $A = 0°$ या $A = 90°$ पर लागू होता है या नहीं।

टिप्पणी : $\tan 0° = 0 = \cot 90°$, $\sec 0° = 1 = \operatorname{cosec} 90°$ और $\sec 90°$, $\operatorname{cosec} 0°$, $\tan 90°$ और $\cot 0°$ परिभाषित नहीं है।

आइए अब हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 9 : $\dfrac{\tan 65°}{\cot 25°}$ का मान निकालिए।

हल : जैसा कि हम जानते हैं कि $\cot A = \tan(90° - A)$.

अतः $$\cot 25° = \tan(90° - 25°) = \tan 65°$$

अर्थात् $$\frac{\tan 65°}{\cot 25°} = \frac{\tan 65°}{\tan 65°} = 1$$

उदाहरण 10 : यदि $\sin 3A = \cos (A - 26°)$ हो, जहाँ, 3 A एक न्यून कोण है तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ यह दिया हुआ है कि $\sin 3A = \cos (A - 26°)$ (1)

क्योंकि $\sin 3A = \cos (90° - 3A)$, इसलिए हम (1) को इस रूप में लिख सकते हैं

$$\cos (90° - 3A) = \cos (A - 26°)$$

क्योंकि $90° - 3A$ और $A - 26°$ दोनों ही न्यून कोण है, इसलिए

$$90° - 3A = A - 26°$$

जिससे $A = 29°$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 11 : $\cot 85° + \cos 75°$ को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल :

$$\cot 85° + \cos 75° = \cot (90° - 5°) + \cos (90° - 15°)$$
$$= \tan 5° + \sin 15°$$

प्रश्नावली 8.3

1. निम्नलिखित का मान निकालिए:

(i) $\dfrac{\sin 18°}{\cos 72°}$ (ii) $\dfrac{\tan 26°}{\cot 64°}$ (iii) $\cos 48° - \sin 42°$ (iv) $\text{cosec}\, 31° - \sec 59°$

2. दिखाइए कि

(i) $\tan 48° \tan 23° \tan 42° \tan 67° = 1$

(ii) $\cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52° = 0$

3. यदि $\tan 2A = \cot (A - 18°)$, जहाँ 2A एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\tan A = \cot B$, तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90°$

5. यदि $\sec 4A = \text{cosec}\, (A - 20°)$, जहाँ 4A एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

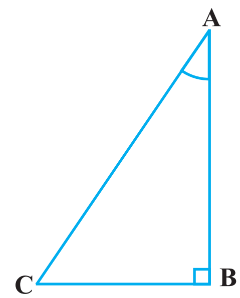
6. यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अंत:कोण हों, तो दिखाइए कि

$$\sin\left(\frac{B + C}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}$$

7. $\sin 67° + \cos 75°$ को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

8.5 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

आपको याद होगा कि एक समीकरण को एक सर्वसमिका तब कहा जाता है जबकि यह संबंधित चरों के सभी मानों के लिए सत्य हो। इसी प्रकार एक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों से संबंधित सर्वसमिका को **त्रिकोणमितीय सर्वसमिका** कहा जाता है। जबकि यह संबंधित कोण (कोणों) के सभी मानों के लिए सत्य होता है।



आकृति 8.22

इस भाग में, हम एक त्रिकोणमितीय सर्वसमिका सिद्ध करेंगे और इसका प्रयोग अन्य उपयोगी त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं को सिद्ध करने में करेंगे।

Δ ABC में, जो B पर समकोण है (देखिए आकृति 8.22)

हमें यह प्राप्त है $\quad AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad (1)$

(1) के प्रत्येक पद को AC^2 से भाग देने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

या
$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

अर्थात् $\quad (\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$

अर्थात् $\quad \mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1} \qquad (2)$

यह सभी A के लिए, जहाँ $0° \leq A \leq 90°$, सत्य होता है। अतः यह एक त्रिकोणमितीय सर्वसमिका है।

आइए, अब हम (1) को AB^2 से भाग दें। ऐसा करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

या
$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

अर्थात् $\quad \mathbf{1 + \tan^2 A = \sec^2 A} \qquad (3)$

क्या यह समीकरण, $A = 0°$ के लिए सत्य है? हाँ, यह सत्य है। क्या यह $A = 90°$ के लिए भी सत्य है? $A = 90°$ के लिए tan A और sec A परिभाषित नहीं है। अत: (3), ऐसे सभी A के लिए सत्य होता है, जहाँ $0° \le A < 90°$

आइए हम यह देखें कि (1) को BC^2 से भाग देने पर हमें क्या प्राप्त होता है।

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

अर्थात् $$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

अर्थात् $$\mathbf{cot^2 A + 1 = cosec^2 A} \qquad (4)$$

ध्यान दीजिए कि $A = 0°$ के लिए cosec A और cot A परिभाषित नहीं है। अत: ऐसे सभी A के लिए (4) सत्य होता है जहाँ $0° < A \le 90°$

इन सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके हम प्रत्येक त्रिकोणमितीय अनुपात को अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कर सकते हैं अर्थात् यदि कोई एक अनुपात ज्ञात हो, तो हम अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान भी ज्ञात कर सकते हैं।

आइए हम यह देखें कि इन सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके इसे हम कैसे ज्ञात कर सकते हैं। मान लीजिए हमें $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ज्ञात है। तब $\cot A = \sqrt{3}$

क्योंकि $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, और $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

और, क्योंकि $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$. इसलिए $\operatorname{cosec} A = 2$

उदाहरण 12 : अनुपातों cos A, tan A और sec A को sin A के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : क्योंकि $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, इसलिए

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, अर्थात् $\cos A = \pm\sqrt{1 - \sin^2 A}$

इससे यह प्राप्त होता है $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ (क्यों?)

अत: $$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} \text{ और } \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

उदाहरण 13 : सिद्ध कीजिए कि sec A (1 – sin A) (sec A + tan A) = 1

हल :

$$\text{वायाँ पक्ष} = \sec A\,(1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1 - \sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{दाँया पक्ष}$$

उदाहरण 14 : सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \dfrac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

हल : $$\text{वायाँ पक्ष} = \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\dfrac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\dfrac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$$

$$\frac{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\dfrac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{दाँया पक्ष}$$

उदाहरण 15 : सर्वसमिका $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$$

हल : क्योंकि हमें $\sec\theta$ और $\tan\theta$ से संबंधित सर्वसमिका प्रयुक्त करनी है, इसलिए आइए हम सबसे पहले सर्वसमिका के वायाँ पक्ष के अंश और हर को $\cos\theta$ से भाग देकर वायाँ पक्ष को $\sec\theta$ और $\tan\theta$ के पदों में रूपांतरित करें।

$$\text{वायाँ पक्ष} = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \frac{\tan\theta - 1 + \sec\theta}{\tan\theta + 1 - \sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - 1}{(\tan\theta - \sec\theta) + 1} = \frac{\{(\tan\theta + \sec\theta) - 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}{\{(\tan\theta - \sec\theta) + 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta - \sec^2\theta) - (\tan\theta - \sec\theta)}{\{\tan\theta - \sec\theta + 1\}\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta},$$

जो सिद्ध की जाने वाली अपेक्षित सर्वसमिका का दाँया पक्ष है।

प्रश्नावली 8.4

1. त्रिकोणमितीय अनुपातों $\sin A$, $\sec A$ और $\tan A$ को $\cot A$ के पदों में व्यक्त कीजिए।
2. $\angle A$ के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को $\sec A$ के पदों में लिखिए।
3. मान निकालिए :

   (i) $\dfrac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$

   (ii) $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$
4. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए :

   (i) $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$ बराबर है:

   (A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

   (ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \mathrm{cosec}\,\theta)$ बराबर है:

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –1

   (iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ बराबर है:

   (A) $\sec A$ (B) $\sin A$ (C) $\mathrm{cosec}\,A$ (D) $\cos A$

   (iv) $\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$ बराबर है:

   (A) $\sec^2 A$ (B) –1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

5. निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून कोण है :

(i) $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii) $\dfrac{\cos A}{1+\sin A} + \dfrac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

[**संकेतः** व्यंजक को $\sin\theta$ और $\cos\theta$ के पदों में लिखिए]

(iv) $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

[**संकेतः** वायाँ पक्ष और दाँया पक्ष को अलग-अलग सरल कीजिए।]

(v) सर्वसमिका $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ को लागू करके

$\dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \text{cosec}\,A + \cot A$

(vi) $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

(vii) $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \text{cosec}\,A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\text{cosec}\,A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

[**संकेत :** वायाँ पक्ष और दाँया पक्ष को अलग-अलग सरल कीजिए]

(x) $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

8.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. समकोण त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है,

$$\sin A = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}, \cos A = \frac{\text{कोण A की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

$$\tan A = \frac{\text{कोण A की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण A की संलग्न भुजा}}$$

2. $\text{cosec } A = \frac{1}{\sin A}$; $\sec A = \frac{1}{\cos A}$; $\tan A = \frac{1}{\cot A}$, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

3. यदि एक न्यून कोण का एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात हो, तो कोण के शेष त्रिकोणमितीय अनुपात सरलता से ज्ञात किए जा सकते हैं।

4. $0°, 30°, 45°, 60°$ और $90°$ के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान।

5. $\sin A$ या $\cos A$ का मान कभी भी 1 से अधिक नहीं होता, जबकि $\sec A$ या $\text{cosec } A$ का मान सदैव 1 से अधिक या 1 के बराबर होता है।

6. $\sin(90° - A) = \cos A$, $\cos(90° - A) = \sin A$;

$\tan(90° - A) = \cot A$, $\cot(90° - A) = \tan A$;

$\sec(90° - A) = \text{cosec } A$, $\text{cosec}(90° - A) = \sec A$.

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ जहाँ $0° \leq A < 90°$

$\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ जहाँ $0° < A \leq 90°$

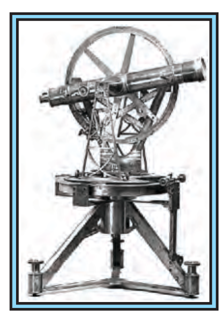
T063CH09

त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग (Some Applications of Trigonometry) 9

9.1 भूमिका

पिछले अध्याय में आपने त्रिकोणमितीय अनुपातों के बारे में अध्ययन किया है। इस अध्याय में आप कुछ उन विधियों के बारे में अध्ययन करेंगे जिनमें त्रिकोणमिति का प्रयोग आपके आस-पास के जीवन से जुड़ा होता है। त्रिकोणमिति एक प्राचीनतम विषय है जिसका अध्ययन पूरे जगत के विद्वान करते आए हैं। जैसा कि हम अध्याय 8 में बता चुके हैं कि त्रिकोणमिति का आविष्कार इस बात को ध्यान में रखकर किया गया था कि इसकी खगोलकी (astimony) में आवश्यकता पड़ती थी। तब से आज तक खगोलविद् इसका प्रयोग पृथ्वी से ग्रहों और तारों की दूरियाँ परिकलित करने में करते आए हैं। त्रिकोणमिति का प्रयोग भूगोल और नौचालन (navigation) में भी किया जाता है। त्रिकोणमिति के ज्ञान का प्रयोग मानचित्र बनाने और देशांतर (longitude) और अक्षांश (latitude) के सापेक्ष एक द्वीप की स्थिति ज्ञात करने में की जाती है।

सर्वेक्षक शताब्दियों से त्रिकोणमिति का प्रयोग करते आ रहे हैं। उन्नीसवीं शताब्दी की 'बृहत् त्रिकोणमितीय सर्वेक्षण' ब्रितानी भारत की एक ऐसी विशाल सर्वेक्षण परियोजना थी जिसके लिए दो बृहत्तम थियोडोलाइट का निर्माण किया गया था। 1852 में सर्वेक्षण करने के दौरान विश्व के सबसे ऊँचे पर्वत की खोज की गयी थी। 160 km से भी अधिक दूरी पर स्थित अलग-अलग छः केंद्रों से इस पर्वत के शिखर का प्रेक्षण किया गया। 1856 में इस शिखर का नामकरण सर जॉर्ज एवरेस्ट के नाम पर किया गया जिसने सर्वेप्रथम विशाल थियोडोलाइट को अधिकृत किया और इनका प्रयोग किया। (सामने बनी आकृति देखिए)। अब ये थियोडोलाइट देहरादून में स्थित भारत सर्वेक्षण के संग्रहालय में प्रदर्शन के लिए रखे गए हैं।



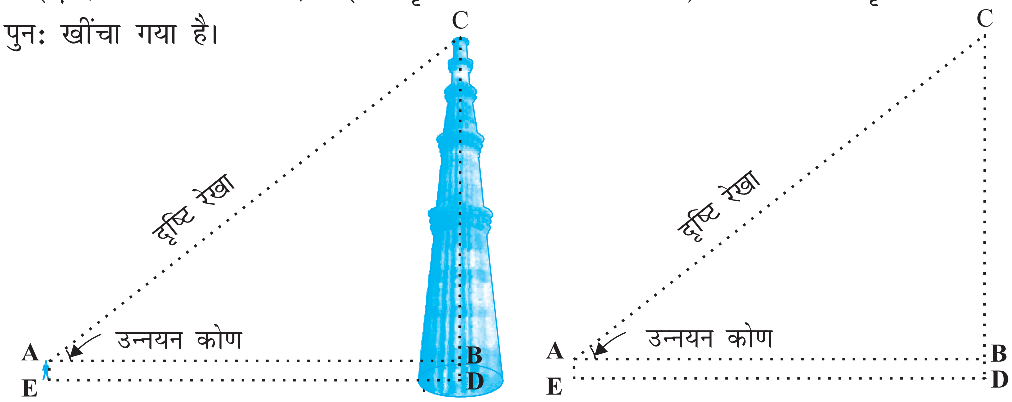
थियोडोलाइट

एक सर्वेक्षण यंत्र, जो त्रिकोणमिति के नियमों पर आधारित है, का प्रयोग एक घूर्णी टेलीस्कोप से कोणों का मापन करने में किया जाता है।

इस अध्याय में हम यह देखेंगे कि किस प्रकार वास्तव में मापन किए बिना ही त्रिकोणमिति का प्रयोग विभिन्न वस्तुओं की ऊँचाइयाँ और दूरियाँ ज्ञात करने में किया जाता है।

9.2 ऊँचाइयाँ और दूरियाँ

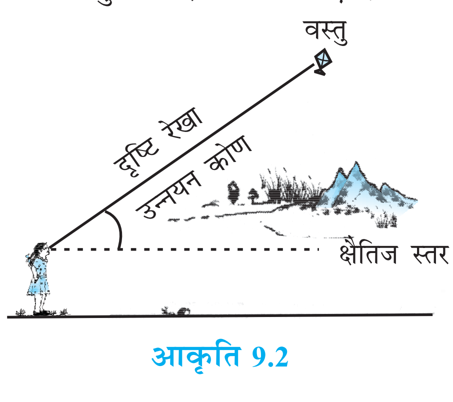
आइए हम अध्याय 8 में दी गई आकृति 8.1 पर विचार करें, जिसे नीचे आकृति 9.1 में पुनः खींचा गया है।



आकृति 9.1

इस आकृति में, छात्र की आँख से मीनार के शिखर तक खींची गई रेखा AC को **दृष्टि-रेखा** (line of sight) कहा जाता है। छात्र मीनार के शिखर की ओर देख रहा है। दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा (Horizental line) से बने कोण BAC को छात्र की आँख से मीनार के शिखर का **उन्नयन कोण** (angle of elevation) कहा जाता है।

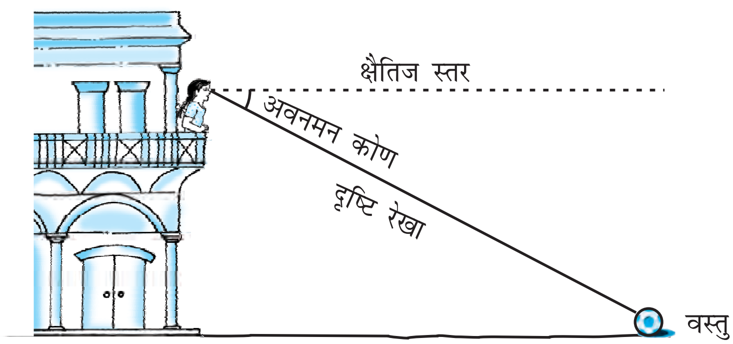
इस प्रकार, **दृष्टि-रेखा** प्रेक्षक की आँख के उस वस्तु के बिंदु को मिलाने वाली रेखा होती है जिसे प्रेक्षक देखता है। देखे गए बिंदु का उन्नयन कोण उस स्थिति में, दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है, जबकि देखा जा रहा बिंदु क्षैतिज स्तर से ऊपर होता है अर्थात् वह स्थिति जबकि वस्तु को देखने के लिए हमें अपना सिर उठाना होता है। (देखिए आकृति 9.2)।



आकृति 9.2

आइए अब हम आकृति 8.2 में दी गई स्थिति पर विचार करें। बालकनी में बैठी लड़की मंदिर की सीढ़ी पर रखे गमले को नीचे की ओर देख रही है। इस स्थिति में, दृष्टि-रेखा क्षैतिज स्तर से नीचे है। दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से इस प्रकार बने कोण को **अवनमन कोण** (angle of depression) कहा जाता है।

अत: देखी जा रही वस्तु पर स्थित बिंदु का **अवनमन कोण** उस स्थिति में दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है जबकि बिंदु क्षैतिज रेखा से नीचे होता है अर्थात् वह स्थिति जबकि देखे जाने वाले बिंदु को देखने के लिए हमें अपना सिर नीचे झुकाना होता है (देखिए आकृति 9.3)।



आकृति 9.3

अब आप आकृति 8.3 में बनी दृष्टि-रेखाएँ और इस तरह बने कोणों को पहचान सकते हैं। ये कोण उन्नयन कोण हैं या अवनमन कोण?

आइए हम आकृति 9.1 को पुन: देखें। यदि आप सही मायने में बिना मापे ही मीनार की ऊँचाई CD ज्ञात करना चाहते हैं तो इसके लिए आपको किस जानकारी की आवश्यकता होती है? इसके लिए निम्नलिखित तथ्यों का ज्ञान होना आवश्यक होता है:

(i) दूरी DE जहाँ छात्र मीनार के पाद-बिंदु से इस दूरी पर खड़ा है।

(ii) मीनार के शिखर का उन्नयन कोण $\angle$ BAC

(iii) छात्र की ऊँचाई AE

यह मानकर कि ऊपर बतायी गयीं तीनों जानकारियाँ हमें ज्ञात हैं तो हम किस प्रकार मीनार की ऊँचाई ज्ञात कर सकते हैं?

आकृति में CD = CB + BD यहाँ BD = AE है जो कि छात्र की ऊँचाई है।

BC ज्ञात करने के लिए हम $\angle$ BAC या $\angle$ A के त्रिकोणमिति अनुपातों का प्रयोग करेंगे।

Δ ABC में, भुजा BC ज्ञात कोण $\angle$A के संबंध में सम्मुख भुजा है। यहाँ हम किन-किन त्रिकोणमिति अनुपातों का प्रयोग कर सकते हैं? इनमें से किसके दो मान हमें ज्ञात है और हमें किसका मान ज्ञात करने की आवश्यकता होती है? tan A या cot A का प्रयोग करने से हमारी खोज का क्षेत्र कम हो जाता है, क्योंकि इन अनुपातों में AB और BC का प्रयोग होता है।

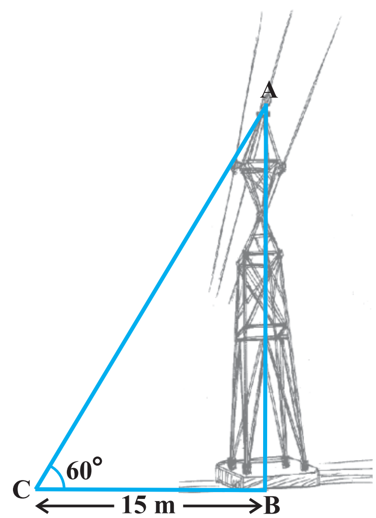
अतः $\tan A = \frac{BC}{AB}$ या $\cot A = \frac{AB}{BC}$, जिसे हल करने पर हमें BC प्राप्त हो जाएगा।

BC और AE जोड़ने पर मीनार की ऊँचाई प्राप्त हो जाएगी।

आइए अब हम कुछ उदाहरण हल करके अभी-अभी चर्चित किए गए प्रक्रम की व्याख्या करें।

उदाहरण 1 : धरती पर एक मीनार ऊर्ध्वाधर (vertically) खड़ी है। धरती के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु से 15 m दूर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : आइए पहले हम प्रश्न को निरूपित करने के लिए एक सरल आरेख बनाएँ (देखिए आकृति 9.4)। यहाँ AB मीनार को निरूपित करता है, CB मीनार से बिंदु की दूरी है और $\angle$ ACB उन्नयन कोण है। हम मीनार की ऊँचाई अर्थात् AB ज्ञात करना चाहते हैं और, यहाँ ACB एक त्रिभुज है जो B पर समकोण है।



आकृति 9.4

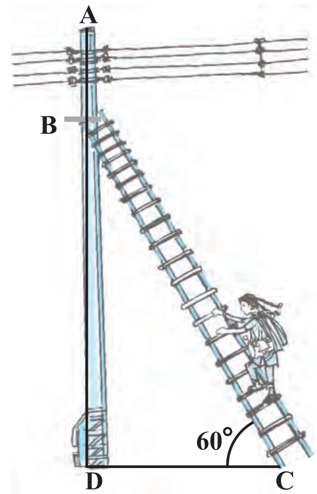
प्रश्न को हल करने के लिए हम त्रिकोणमितीय अनुपात tan 60° (या cot 60°) लेते हैं, क्योंकि इस अनुपात में AB और BC दोनों होते हैं

अब $\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

अर्थात् $\sqrt{3} = \frac{AB}{15}$

अर्थात् $AB = 15\sqrt{3}$

अतः मीनार की ऊँचाई $15\sqrt{3}$ m है।



आकृति 9.5

उदाहरण 2 : एक बिजली मिस्त्री को एक 5m ऊँचे खंभे पर आ गई खराबी की मरम्मत करनी है। मरम्मत का काम करने के लिए उसे खंभे के शिखर से 1.3m नीचे एक बिंदु तक वह पहुँचना चाहती है (देखिए आकृति 9.5)। यहाँ तक पहुँचने के लिए प्रयुक्त सीढ़ी की लंबाई कितनी होनी चाहिए जिससे कि क्षैतिज से 60° के कोण से झुकाने पर वह अपेक्षित स्थिति तक पहुँच जाए? और यह भी बताइए कि खंभे का पाद-बिंदु कितनी दूरी पर सीढ़ी के पाद-बिंदु से होना चाहिए? (यहाँ आप $\sqrt{3}$ = 1.73 ले सकते हैं।)

हल : आकृति 9.5 में, बिजली मिस्त्री को खंभे AD पर बिंदु B तक पहुँचना है।

अत: $\quad BD = AD - AB = (5 - 1.3)\text{m} = 3.7 \text{ m}$

यहाँ BC सीढ़ी को प्रकट करता है। हमें इसकी लंबाई अर्थात् समकोण त्रिभुज BDC का कर्ण ज्ञात करना है।

अब, क्या आप यह बता सकते हैं कि हमें किस त्रिकोणमिति अनुपात का प्रयोग करना चाहिए?

यह त्रिकोणमिति अनुपात sin 60° होना चाहिए।

अत: $$\frac{BD}{BC} = \sin 60° \text{ या } \frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

इसलिए $$BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28 \text{ m (लगभग)}$$

अर्थात् सीढ़ी की लंबाई 4.28 m होनी चाहिए।

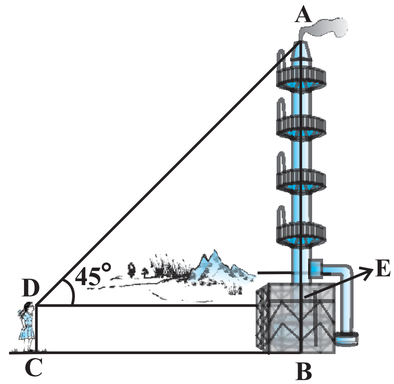
अब $$\frac{DC}{BD} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

अर्थात् $$DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14 \text{ m (लगभग)}$$

अत: उसे सीढ़ी के पाद को खंभे से 2.14 m की दूरी पर रखना चाहिए।

उदाहरण 3 : 1.5 m लंबा एक प्रेक्षक एक चिमनी से 28.5 m की दूरी पर है। उसकी आँखों से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। चिमनी की ऊँचाई बताइए।

हल : यहाँ AB चिमनी है, CD प्रेक्षक है और ∠ ADE उन्नयन कोण है (देखिए आकृति 9.6)। यहाँ ADE एक त्रिभुज है जिसमें कोण E समकोण है और हमें चिमनी की ऊँचाई ज्ञात करनी है।



आकृति 9.6

यहाँ $AB = AE + BE = (AE + 1.5)$ m

और $DE = CB = 28.5$ m

AE ज्ञात करने के लिए हमें एक ऐसा त्रिकोणमिति अनुपात लेना चाहिए जिसमें AE और DE दोनों हो। इसके लिए आइए हम उन्नयन कोण का tangent लें।

अब $\tan 45° = \frac{AE}{DE}$

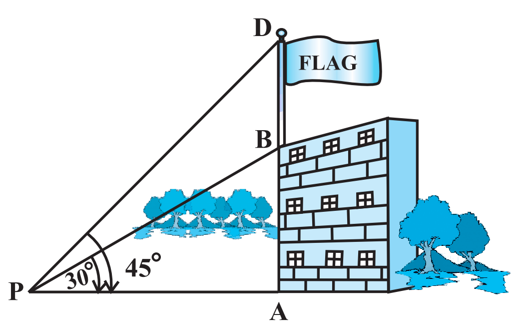
अर्थात् $1 = \frac{AE}{28.5}$

इसलिए $AE = 28.5$

अतः चिमनी की ऊँचाई (AB) = (28.5 + 1.5) m = 30 m

उदाहरण 4 : भूमि के एक बिंदु P से एक 10 m ऊँचे भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। भवन के शिखर पर एक ध्वज को लहराया गया है और P से ध्वज के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। ध्वजदंड (flagstaff) की लंबाई और बिंदु P से भवन की दूरी ज्ञात कीजिए। (यहाँ आप $\sqrt{3} = 1.732$ ले सकते हैं।)

हल : आकृति 9.7 में, AB भवन की ऊँचाई प्रकट करता है, BD ध्वजदंड प्रकट करता है और P दिया हुआ बिंदु प्रकट करता है। ध्यान दीजिए कि यहाँ दो समकोण त्रिभुज PAB और PAD हैं। हमें ध्वजदंड की लंबाई अर्थात् DB और बिंदु P से भवन की दूरी अर्थात् PA ज्ञात करना है।



आकृति 9.7

क्योंकि हमें भवन की ऊँचाईAB ज्ञात है इसलिए पहले हम समकोण Δ PAB लेंगे।

यहाँ $$\tan 30° = \frac{AB}{AP}$$

अर्थात् $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$$

इसलिए $$AP = 10\sqrt{3}$$

अर्थात् P से भवन की दूरी $10\sqrt{3}$ m = 17.32 m

आइए अब हम यह मान लें कि DB = x m है तब AD = $(10 + x)$ m

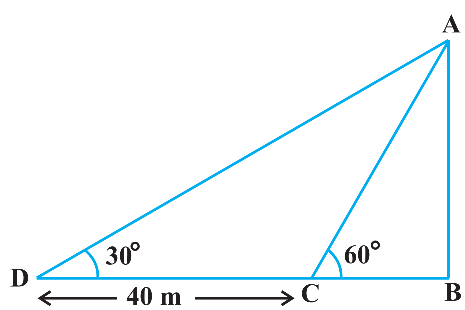
अब समकोण Δ PAD में $$\tan 45° = \frac{AD}{AP} = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$$

इसलिए $$1 = \frac{10+x}{10\sqrt{3}}$$

अर्थात् $$x = 10\left(\sqrt{3}-1\right) = 7.32$$

अतः ध्वजदंड की लंबाई 7.32 m है।

उदाहरण 5 : एक समतल जमीन पर खड़ी मीनार की छाया उस स्थिति में 40 m अधिक लंबी हो जाती है जबकि सूर्य का उन्नतांश (altitude) 60° से घटकर 30° हो जाता है अर्थात् छाया के एक सिरे से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और DB छाया की लंबाई है जबकि उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.8

हल : मान लीजिए कि AB की लंबाई h मीटर है और BC, x मीटर है। प्रश्न के अनुसार DB, BC से 40m अधिक लंबा है।

अतः $DB = (40 + x)$ m

अब, यहाँ दो समकोण त्रिभुज ABC और ABD है।

Δ ABC में $\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

या $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ (1)

Δ ABD में $\tan 30° = \frac{AB}{BD}$

अर्थात् $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 40}$ (2)

(1) से हमें यह प्राप्त होता है

$$h = x\sqrt{3}$$

इस मान को (2) में प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है $\left(x\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = x + 40$, अर्थात् $3x = x + 40$

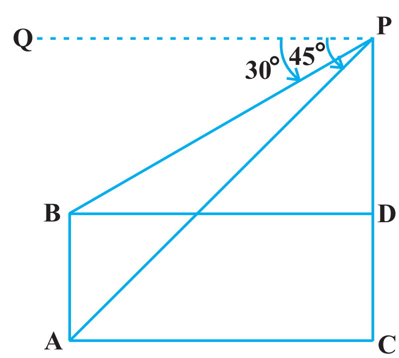
अर्थात् $x = 20$

इसलिए $h = 20\sqrt{3}$ [(1) से]

अतः मीनार की ऊँचाई $20\sqrt{3}$ m है।

उदाहरण 6 : एक बहुमंजिल भवन के शिखर से देखने पर एक 8 m ऊँचे भवन के शिखर और तल के अवनमन-कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। बहुमंजिल भवन की ऊँचाई और दो भवनों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : आकृति 9.9 में PC बहुमंजिल भवन को और AB, 8 m ऊँचे भवन को प्रकट करता है। हम बहुमंजिल भवन की ऊँचाई, अर्थात् PC और दो भवनों के बीच की दूरी अर्थात् AC ज्ञात करना चाहते हैं।



आकृति 9.9

आकृति को अच्छी तरह देखिए। आप यहाँ देखेंगे कि PB समांतर रेखाओं PQ और BD की एक तिर्यक-छेदी रेखा है। अतः $\angle$ QPB और $\angle$ PBD एकांतर कोण हैं और इसलिए बराबर हैं। अतः $\angle PBD = 30°$, इसी प्रकार, $\angle PAC = 45°$

समकोण Δ PBD में

$$\frac{PD}{BD} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ या } BD = PD\sqrt{3}$$

समकोण Δ PAC में हम पाते हैं

$$\frac{PC}{AC} = \tan 45° = 1$$

अर्थात् $PC = AC$

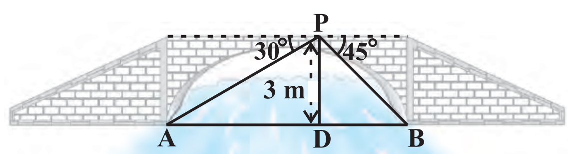
और $PC = PD + DC$ इसलिए $PD + DC = AC$

क्योंकि $AC = BD$ और $DC = AB = 8$ m, इसलिए $PD + 8 = BD = PD\sqrt{3}$ (क्यों?)

इससे यह प्राप्त होता है: $PD = \dfrac{8}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{8\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = 4\left(\sqrt{3}+1\right)\text{m}$

अतः बहुमंजिल भवन की ऊँचाई $\left\{4\left(\sqrt{3}+1\right)+8\right\}\text{m} = 4\left(3+\sqrt{3}\right)\text{m}$ है और दो भवनों के बीच की दूरी भी $4\left(3+\sqrt{3}\right)\text{m}$ है।

उदाहरण 7 : एक नदी के पुल के एक बिंदु से नदी के सम्मुख किनारों के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। यदि पुल किनारों से 3 m की ऊँचाई पर हो तो नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.10

हल : आकृति 9.10 में, A और B नदी के सम्मुख किनारों के बिंदुओं को प्रकट करते हैं, जिससे कि AB नदी की चौड़ाई है। 3 m की ऊँचाई पर बने पुल पर एक बिंदु P है अर्थात् DP = 3 m है। हम नदी की चौड़ाई ज्ञात करना चाहते हैं जो कि Δ APB की भुजा AB की लंबाई है।

अब $AB = AD + DB$

समकोण Δ APD में $\angle A = 30°$

अतः $\tan 30° = \dfrac{PD}{AD}$

अर्थात् $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD}$ या $AD = 3\sqrt{3}$ m

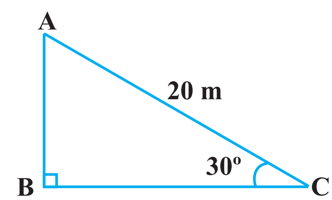
अत: समकोण Δ PBD में, $\angle B = 45°$ है। इसलिए BD = PD = 3 m

अब $AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3})$ m

इसलिए नदी की चौड़ाई $3\left(\sqrt{3}+1\right)$m है।

प्रश्नावली 9.1

1. सर्कस का एक कलाकार एक 20m लंबी डोर पर चढ़ रहा है जो अच्छी तरह से तनी हुई है और भूमि पर सीधे लगे खंभे के शिखर से बंधा हुआ है। यदि भूमि स्तर के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण 30° का हो तो खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति 9.11)।



आकृति 9.11

2. आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ 30° का कोण बनाता है। पेड़ के पाद-बिंदु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छूता है, 8m है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
3. एक ठेकेदार बच्चों को खेलने के लिए एक पार्क में दो फिसलनपट्टी लगाना चाहती है। 5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए वह एक ऐसी फिसलनपट्टी लगाना चाहती है जिसका शिखर 1.5 m की ऊँचाई पर हो और भूमि के साथ 30° के कोण पर झुका हुआ हो, जबकि इससे अधिक उम्र के बच्चों के लिए वह 3m की ऊँचाई पर एक अधिक ढाल की फिसलनपट्टी लगाना चाहती है, जो भूमि के साथ 60° का कोण बनाती हो। प्रत्येक स्थिति में फिसलनपट्टी की लंबाई क्या होनी चाहिए?
4. भूमि के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु से 30m की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
5. भूमि से 60 m की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिंदु से बांध दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढील नहीं है, डोरी की लंबाई ज्ञात कीजिए।
6. 1.5 m लंबा एक लड़का 30 m ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितनी दूरी तक चलकर गया है।

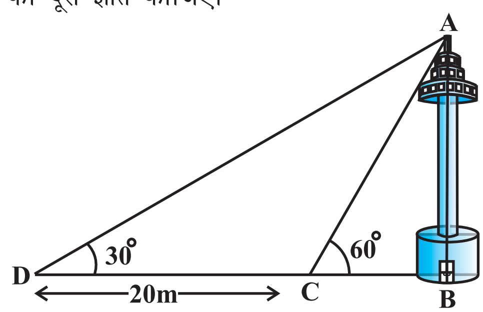
7. भूमि के एक बिंदु से एक 20 m ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार (Transmission tower) के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमश: 45° और 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

8. एक पेडस्टल (Pedastal) के शिखर पर एक 1.6 m ऊँची मूर्ति लगी है। भूमि के एक बिंदु से मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और उसी बिंदु से पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। पेडस्टल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

9. एक मीनार के पाद-बिंदु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद-बिंदु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 50m ऊँची हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

10. एक 80 m चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान लंबाई वाले दो खंभे लगे हुए हैं। इन दोनों खंभों के बीच सड़क के एक बिंदु से खंभों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमश: 60° और 30° है। खंभों की ऊँचाई और खंभों से बिंदु की दूरी ज्ञात कीजिए।

11. एक नहर के एक तट पर एक टीवी टॉवर ऊर्ध्वाधरत: (vertically) खड़ा है। टॉवर के ठीक सामने दूसरे तट के एक अन्य बिंदु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। इसी तट पर इस बिंदु से 20 m दूर और इस बिंदु को मीनार के पाद से मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक अन्य बिंदु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। (देखिए आकृति 9.12)। टॉवर की ऊँचाई और नहर की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

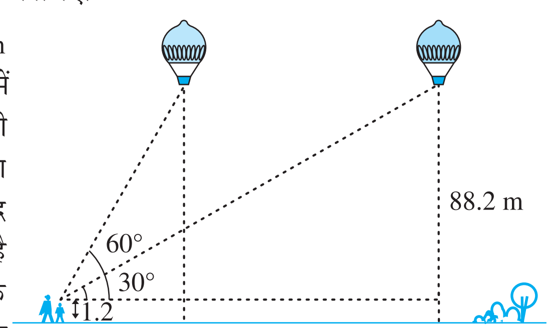


आकृति 9.12

12. 7 m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

13. समुद्र-तल से 75 m ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

14. 1.2 m लंबी एक लड़की भूमि से 88.2 m की ऊँचाई पर एक क्षैतिज रेखा में हवा में उड़ रहे गुब्बारे को देखती है। किसी भी क्षण लड़की की आँख से गुब्बारे का उन्नयन कोण 60° है। कुछ समय बाद उन्नयन कोण घटकर 30° हो जाता है (देखिए आकृति 9.13)। इस अंतराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।



आकृति 9.13

15. एक सीधा राजमार्ग एक मीनार के पाद तक जाता है। मीनार के शिखर पर खड़ा एक आदमी एक कार को $30°$ के अवनमन कोण पर देखता है जो कि मीनार के पाद की ओर एक समान चाल से जाता है। छः सेकेंड बाद कार का अवनमन कोण $60°$ हो गया। इस बिंदु से मीनार के पाद तक पहुँचने में कार द्वारा लिया गया समय ज्ञात कीजिए।

16. मीनार के आधार से और एक सरल रेखा में 4 m और 9 m की दूरी पर स्थित दो बिंदुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6 m है।

9.3 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. (i) **दृष्टि-रेखा** प्रेक्षक की आँख से प्रेक्षक द्वारा देखी गई वस्तु के बिंदु को मिलाने वाली रेखा होती है।

(ii) देखी गई वस्तु का **उन्नयन कोण** दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है जबकि यह क्षैतिज स्तर से ऊपर होता है अर्थात् वह स्थिति जबकि वस्तु को देखने के लिए हमें अपने सिर को ऊपर उठाना होता है।

(iii) देखी गई वस्तु का **अवनमन कोण** दृष्टि-रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है जबकि क्षैतिज रेखा क्षैतिज स्तर से नीचे होती है अर्थात् वह स्थिति जबकि वस्तु को देखने के लिए हमें अपने सिर को झुकाना पड़ता है।

2. त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से किसी वस्तु की ऊँचाई या लंबाई या दो सुदूर वस्तुओं के बीच की दूरी ज्ञात की जा सकती है।

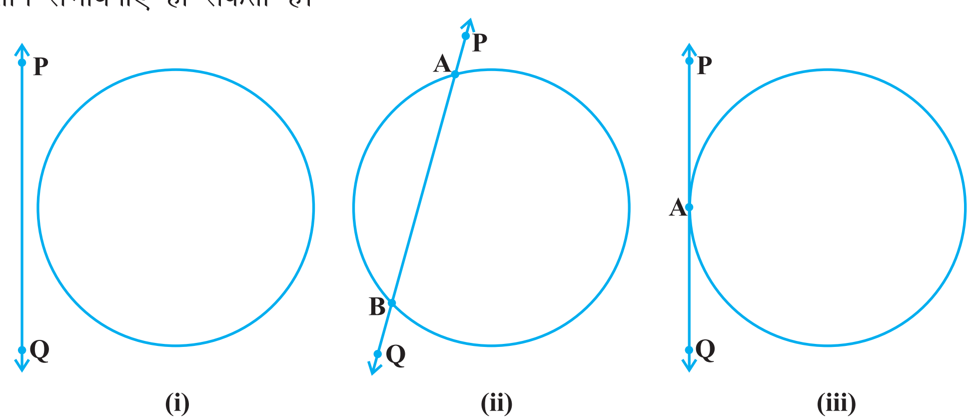
1063CH10

वृत्त (Circles) 10

10.1 भूमिका

आपने कक्षा IX में पढ़ा है कि वृत्त एक तल के उन बिंदुओं का समूह होता है जो एक नियत बिंदु (केंद्र) से अचर दूरी (त्रिज्या) पर होते हैं। आपने वृत्त से संबंधित अवधारणाओं जैसे जीवा, वृत्तखंड, त्रिज्यखंड, चाप आदि के बारे में भी पढ़ा है। आइए अब एक तल में स्थित एक वृत्त तथा एक रेखा की विभिन्न स्थितियों पर विचार करें।

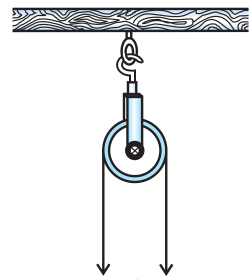
आइए, हम एक वृत्त तथा एक रेखा PQ पर ध्यान दें। दी गई निम्न आकृति 10.1 में तीन संभावनाएँ हो सकती हैं।



आकृति 10.1

आकृति 10.1 (i) में, रेखा PQ तथा वृत्त में कोई उभयनिष्ठ बिंदु नहीं है। इस दशा में PQ को वृत्त के सापेक्ष **अप्रतिच्छेदी रेखा** कहते हैं। आकृति 10.1 (ii) में रेखा PQ और वृत्त में दो उभयनिष्ठ बिंदु A और B हैं। इस दशा में हम रेखा PQ को वृत्त की **छेदक रेखा** कहते हैं। आकृति 10.1 (iii) में रेखा PQ और वृत्त में एक और केवल एक उभयनिष्ठ बिंदु A है। इस दशा में रेखा वृत्त की **स्पर्श रेखा** कहलाती है।

आपने कुएँ के ऊपर स्थिर की हुई एक घिरनी को देखा होगा जिसका उपयोग कुएँ से पानी निकालने के लिए किया जाता है। आकृति 10.2 को देखिए। यहाँ घिरनी के दोनों ओर की रस्सी को यदि किरण की तरह समझें तो वह घिरनी द्वारा निरूपित वृत्त पर स्पर्श रेखा की तरह होगी।



आकृति 10.2

ऊपर दी गई स्थितियों के अतिरिक्त क्या वृत्त के सापेक्ष रेखा की कोई अन्य स्थिति हो सकती है? आप देख सकते हैं कि इन स्थितियों के अतिरिक्त रेखा की वृत्त के सापेक्ष कोई अन्य स्थिति नहीं हो सकती है। इस अध्याय में हम वृत्त की स्पर्श रेखा के अस्तित्व के बारे में पढ़ेंगे तथा उनके कुछ गुणों का भी अध्ययन करेंगे।

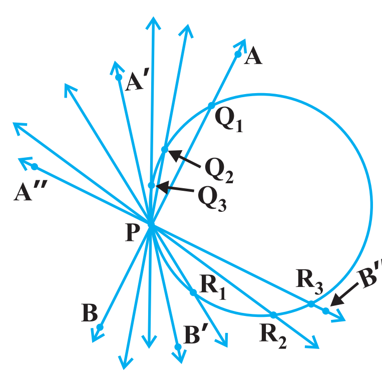
10.2 वृत्त की स्पर्श रेखा

पिछले परिच्छेद में आपने देखा है कि **किसी वृत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है जो वृत्त को केवल एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है।**

वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा के अस्तित्व को समझने के लिए आइए हम निम्न क्रियाकलाप करें।

क्रियाकलाप 1 : एक वृत्ताकार तार लीजिए तथा वृत्ताकार तार के एक बिंदु P पर एक सीधा तार AB इस प्रकार जोड़िए कि वह बिंदु P के परितः एक समतल में घूम सके। इस प्रणाली को एक मेज़ पर रखिए तथा तार AB को बिंदु P के परितः धीमे-धीमे घुमाइए जिससे सीधे तार की विभिन्न अवस्थाएँ प्राप्त हो सकें [देखिए आकृति 10.3(i)]।

विभिन्न स्थितियों में तार, वृत्ताकार तार को बिंदु P एवं एक अन्य बिंदु Q_1 या Q_2 या Q_3 आदि पर प्रतिच्छेदित करता है। एक स्थिति में, आप देखेंगे कि वह वृत्त को केवल एक बिंदु P पर ही प्रतिच्छेदित करेगा (AB की स्थिति A′B′ को देखिए)। ये यह दर्शाता है कि वृत्त के एक बिंदु पर एक स्पर्श रेखा का अस्तित्व है। पुनः घुमाने पर आप प्रेक्षण कर सकते हैं कि AB की अन्य सभी स्थितियों में वह वृत्त को बिंदु P तथा एक अन्य बिंदु R_1 या R_2 या R_3 आदि पर प्रतिच्छेद करता है। इस प्रकार आप प्रेक्षण कर सकते हैं कि **वृत्त के एक बिंदु पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा होती है।**

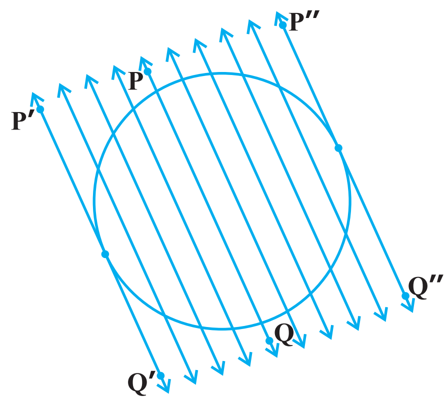


आकृति 10.3 (i)

उपर्युक्त क्रियाकलाप करते हुए आपने अवश्य प्रेक्षण किया होगा कि जैसे-जैसे स्थिति AB से स्थिति A′ B′ की ओर बढ़ती है, रेखा AB और वृत्त का उभयनिष्ठ बिंदु Q_1, उभयनिष्ठ बिंदु P की ओर निकट आता जाता है। अंततः, AB की स्थिति A′B′ में वह बिंदु P के संपाती हो जाता है। पुनः ध्यान दीजिए कि क्या होता है जब A″B″, P के परितः दक्षिणावर्त घुमाया जाता है? उभयनिष्ठ बिंदु R_3 धीरे-धीरे बिंदु P की ओर अग्रसर होता है तथा अंततः P से संपाती हो जाता है। इस प्रकार हम देखते हैं:

किसी वृत्त की स्पर्श रेखा छेदक रेखा की एक विशिष्ट दशा है जब संगत जीवा के दोनों सिरे संपाती हो जाएँ।

क्रियाकलाप 2 : एक कागज पर एक वृत्त और वृत्त की छेदक रेखा PQ खींचिए। छेदक रेखा के समांतर दोनों ओर अनेक रेखाएँ खींचिए। आप पाएँगे कि कुछ चरणों के बाद रेखाओं द्वारा काटी गई जीवा की लंबाई धीरे-धीरे कम हो रही है अर्थात् रेखा तथा वृत्त के दोनों प्रतिच्छेद बिंदु पास आ रहे हैं [देखिए आकृति 10.3(ii)]। एक स्थिति में छेदक रेखा के एक ओर यह लंबाई तथा दूसरी स्थिति में यह दूसरी ओर शून्य हो जाती है। छेदक रेखा की स्थितियों P′Q′ तथा P″Q″ की आकृति 10.3 (ii) में अवलोकन कीजिए। ये दोनों रेखाएँ दी गयी छेदक रेखा PQ के समांतर दो स्पर्श रेखाएँ हैं इससे आपको यह जानने में सहायता मिलती है कि एक छेदक रेखा के समांतर वृत्त की दो से अधिक स्पर्श रेखाएँ नहीं होती हैं।

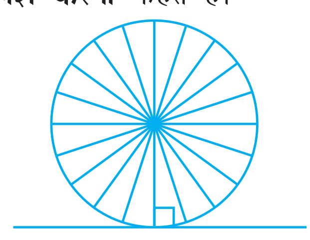


आकृति 10.3(ii)

इस क्रियाकलाप से यह निष्कर्ष भी निकलता है कि स्पर्श रेखा छेदक रेखा की एक विशेष स्थिति है जब उसकी संगत जीवा के दोनों सिरे संपाती हो जाएँ।

स्पर्श रेखा और वृत्त के उभयनिष्ठ बिंदु को **स्पर्श बिंदु** [आकृति 10.1 (iii) में बिंदु A] कहते हैं तथा स्पर्श रेखा को वृत्त के उभयनिष्ठ बिंदु पर **स्पर्श करना** कहते हैं।

अब आप अपने चारों ओर देखिए। क्या आपने एक साइकिल अथवा एक बैलगाड़ी को चलते देखा है? इनके पहियों की ओर देखिए। एक पहिए की सभी तीलियाँ इसकी त्रिज्याओं के अनुरूप हैं। अब पहिए की स्थिति का धरती पर गति करने के सापेक्ष व्याख्या कीजिए। क्या आपको कहीं स्पर्श रेखा दिखती है? (देखिए आकृति 10.4)। वास्तव



आकृति 10.4

में पहिया एक रेखा के अनुदिश गति करता है जो पहिये को निरूपित करने वाले वृत्त परस्पर्श रेखा है। यह भी देखिए कि सभी स्थितियों में आकृति 10.4 धरती के स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब दृष्टिगोचर होती है (देखिए आकृति 10.4)। अब हम स्पर्श रेखा के इस गुण को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 10.1 : *वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।*

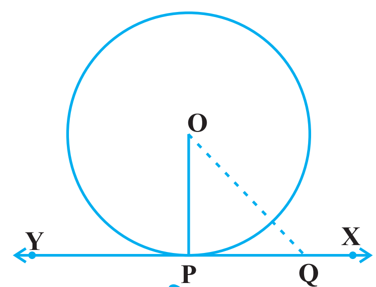
उपपत्ति : हमें केंद्र O वाला एक वृत्त दिया है और एक बिंदु P पर स्पर्श रेखा XY दी है। हमें सिद्ध करना है कि OP, XY पर लंब है।

XY पर P के अतिरिक्त एक बिंदु Q लीजिए और OQ को मिलाइए (देखिए आकृति 10.5)।

बिंदु Q वृत्त के बाहर होना चाहिए (क्यों? ध्यान दीजिए कि यदि Q वृत्त के अंदर है तो XY वृत्त की एक छेदक रेखा हो जाएगी और वह वृत्त की स्पर्श रेखा नहीं होगी)। अत:, OQ त्रिज्या OP से बड़ी है। अर्थात्

$$OQ > OP$$

क्योंकि यह बिंदु P के अतिरिक्त XY के प्रत्येक बिंदु के लिए सत्य है, OP बिंदु O से XY के अन्य बिंदुओं की न्यूनतम दूरी है। इसलिए OP, XY पर लंब है (जैसा कि प्रमेय A1.2 में दर्शाया गया है)। ■



आकृति 10.5

टिप्पणी :

1. उपर्युक्त प्रमेय से हम यह भी निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वृत्त के किसी बिंदु पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा होती है।
2. स्पर्श बिंदु से त्रिज्या को समाहित करने वाली रेखा को वृत्त के उस बिंदु पर 'अभिलंब' भी कहते हैं।

प्रश्नावली 10.1

1. एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं?
2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:
   (i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे ________ बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है।
   (ii) वृत्त को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को ________ कहते हैं।
   (iii) एक वृत्त की ________ समांतर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।
   (iv) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिंदु को ________ कहते हैं।

3. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिंदु P पर स्पर्श रेखा PQ केंद्र O से जाने वाली एक रेखा से बिंदु Q पर इस प्रकार मिलती है कि OQ = 12 सेमी। PQ की लंबाई है:

   (A) 12 सेमी (B) 13 सेमी (C) 8.5 सेमी (D) $\sqrt{119}$ सेमी

4. एक वृत्त खींचिए और दो एक दी गई रेखा के समांतर दो ऐसी रेखाएँ खींचिए कि उनमें से एक स्पर्श रेखा हो तथा दूसरी छेदक रेखा हो।

10.3 एक बिंदु से एक वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की संख्या

किसी बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की संख्या के बारे में जानने के लिए निम्न क्रियाकलाप करें:

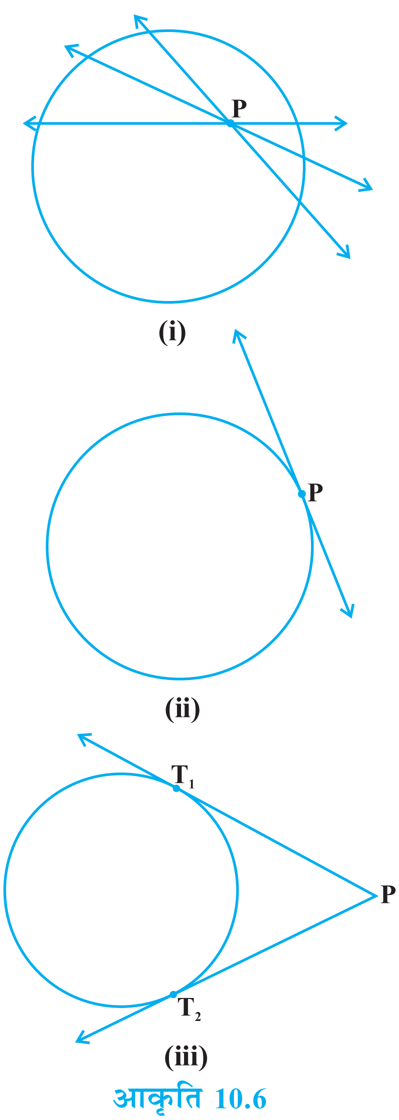
क्रियाकलाप 3 : एक कागज़ पर एक वृत्त खींचिए। एक बिंदु P इसके अंदर लीजिए। उस बिंदु से वृत्त पर स्पर्श रेखा खींचने का प्रयत्न कीजिए। आप क्या पाते हैं? आप पाते हैं कि इससे खींची गई प्रत्येक रेखा वृत्त को दो बिंदुओं पर परिच्छेद करती है इसलिए इन रेखाओं में से कोई स्पर्श रेखा नहीं हो सकती [देखिए आकृति 10.6 (i)]।

पुनः, वृत्त पर एक बिंदु P लीजिए तथा इस बिंदु से स्पर्श रेखाएँ खींचिए। आपने पहले से ही प्रेक्षण किया है कि वृत्त के इस बिंदु पर एक ही स्पर्श रेखा होती है [देखिए आकृति 10.6 (ii)]।

अंत में वृत्त के बाहर एक बिंदु P लीजिए और वृत्त पर इस बिंदु से स्पर्श रेखाएँ खींचने का प्रयत्न करिए। आप क्या प्रेक्षण करते हैं? आप पाएँगे कि इस बिंदु से वृत्त पर दो और केवल दो स्पर्श रेखाएँ खींच सकते हैं (देखिए आकृति 10.6 (iii)]।

संक्षेप में हम इन यथार्थों को निम्न स्थितियों में प्रकट कर सकते हैं।

स्थिति 1 : वृत्त के अंदर स्थित किसी बिंदु से जाने वाली वृत्त पर कोई स्पर्श रेखा नहीं है।



आकृति 10.6

स्थिति 2 : वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त पर एक और केवल एक स्पर्श रेखा है।

स्थिति 3 : वृत्त के बाहर स्थित किसी बिंदु से जाने वाली वृत्त पर दो और केवल दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

आकृति 10.6 (iii) में स्पर्श रेखाओं PT_1 तथा PT_2 के क्रमशः T_1 तथा T_2 स्पर्श बिंदु हैं।

वाह्य बिंदु P से वृत्त के स्पर्श बिंदु तक स्पर्श रेखा खंड की लंबाई को बिंदु P से वृत्त पर **स्पर्श रेखा की लंबाई** कहते हैं।

ध्यान दीजिए कि आकृति 10.6 (iii) में PT_1 और PT_2 बिंदु P से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ हैं। लंबाइयों PT_1 और PT_2 में एक उभयनिष्ठ गुण है। क्या आप इसे प्राप्त कर सकते हैं? PT_1 और PT_2 को मापिए। क्या ये बराबर हैं? वास्तव में सदैव ऐसा ही है। आइए इस तथ्य की एक उपपत्ति निम्न प्रमेय में दें।

प्रमेय 10.2 : *वाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती है।*

उपपत्ति : हमें केंद्र O वाला एक वृत्त, वृत्त के बाहर का एक बिंदु P तथा P से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PQ, PR दी है (देखिए आकृति 10.7)। हमें सिद्ध करना है कि PQ = PR

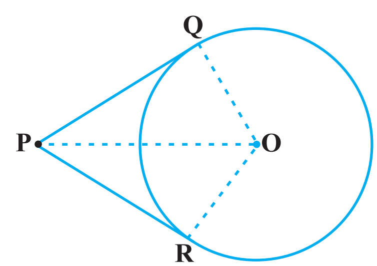


Fig. 10.7

इसके लिए हम OP, OQ और OR को मिलाते हैं। तब $\angle$ OQP तथा $\angle$ ORP समकोण हैं क्योंकि ये त्रिज्याओं और स्पर्श रेखाओं के बीच के कोण हैं और प्रमेय 10.1 से ये समकोण है। अब समकोण त्रिभुजों OQP तथा ORP में,

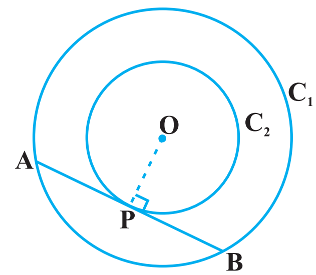
	OQ = OR	(एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)
	OP = OP	(उभयनिष्ठ)
अत:	Δ OQP $\cong$ Δ ORP	(RHS सर्वांगसमता द्वारा)
इससे प्राप्त होता है	PQ = PR	(CPCT) ■

टिप्पणी :

1. प्रमेय को पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करके भी निम्न प्रकार से सिद्ध किया जा सकता है:
   $PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2$ (क्योंकि OQ = OR)
   जिससे प्राप्त होता है कि PQ = PR
2. यह भी ध्यान दीजिए कि $\angle$ OPQ = $\angle$ OPR । अत: OP कोण QPR का अर्धक है, अर्थात् वृत्त का केंद्र स्पर्श रेखाओं के बीच के कोण अर्धक पर स्थित होता है।

आइए, अब कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : सिद्ध कीजिए कि दो सकेंद्रीय (Concentric) वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिंदु पर समद्विभाजित होती है।



आकृति 10.8

हल : हमें केंद्र O वाले दो सकेंद्रीय वृत्त C_1 और C_2 तथा बड़े वृत्त C_1 की जीवा AB, जो छोटे वृत्त C_2 को बिंदु P पर स्पर्श करती है, दिए हैं (देखिए आकृति 10.8)।

हमें सिद्ध करना है कि AP = BP

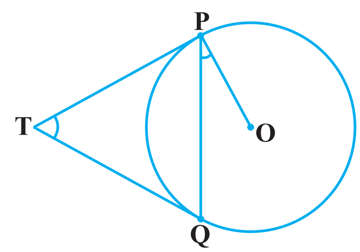
आइए OP को मिलाएँ। इस प्रकार AB, C_2 के बिंदु P पर स्पर्श रेखा है और OP त्रिज्या है। अत: प्रमेय 10.1 से

$$OP \perp AB$$

अब AB वृत्त C_1 की एक जीवा है और $OP \perp AB$ है। अत:, OP जीवा AB को समद्विभाजित करेगी क्योंकि केंद्र से जीवा पर खींचा गया लंब उसे समद्विभाजित करता है,

अर्थात् $\quad AP = BP$

उदाहरण 2 : केंद्र O वाले वृत्त पर बाह्य बिंदु T से दो स्पर्श रेखाएँ TP तथा TQ खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle PTQ = 2 \angle OPQ$ है।



आकृति 10.9

हल : हमें केंद्र O वाला एक वृत्त, एक बाह्य बिंदु T तथा वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ TP और TQ, जहाँ P, Q स्पर्श बिंदु हैं, दिए हैं (देखिए आकृति 10.9)। हमें सिद्ध करना है कि

$$\angle PTQ = 2 \angle OPQ$$

माना $\quad \angle PTQ = \theta$

अब प्रमेय 10.2 से TP = TQ । अत: TPQ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

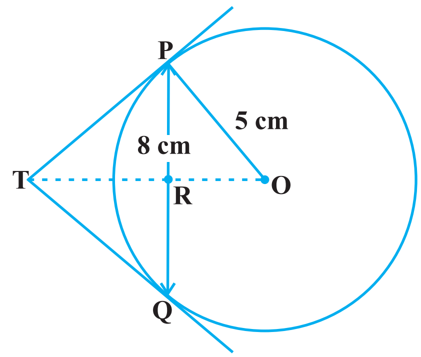
इसलिए $\quad \angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$

प्रमेय 10.1 से $\angle OPT = 90^\circ$ है।

अत: $\quad \angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\theta\right) = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PTQ$

इससे $\angle PTQ = 2 \angle OPQ$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 3 : 5 cm त्रिज्या के एक वृत्त की 8 cm लंबी एक जीवा PQ है। P और Q पर स्पर्श रेखाएँ परस्पर एक बिंदु T पर प्रतिच्छेद करती हैं (देखिए आकृति 10.10)। TP की लंबाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.10

हल : OT को मिलाएँ। माना यह PQ को बिंदु R पर प्रतिच्छेदित करती है। तब Δ TPQ समद्विबाहु है और TO, ∠ PTQ का कोणार्धक है। इसलिए OT ⊥ PQ और इस प्रकार OT, PQ का अर्धक है जिससे प्राप्त होता है PR = RQ = 4 cm

साथ ही $\quad OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2}$ cm = 3 cm

अब $\quad \angle TPR + \angle RPO = 90° = \angle TPR + \angle PTR \qquad$ (क्यों?)

अतः $\quad \angle RPO = \angle PTR$

इसलिए समकोण त्रिभुज TRP और समकोण त्रिभुज PRO, AA समरूपता द्वारा समरूप हैं। इससे $\dfrac{TP}{PO} = \dfrac{RP}{RO}$ प्राप्त होता है। अर्थात् $\dfrac{TP}{5} = \dfrac{4}{3}$ अर्थात् $TP = \dfrac{20}{3}$ cm

टिप्पणी : TP को पाइथागोरस प्रमेय द्वारा निम्न प्रकार से भी प्राप्त कर सकते हैं:

माना $\qquad TP = x$ और $TR = y$ तो

$$x^2 = y^2 + 16 \qquad \text{(समकोण Δ PRT लेकर)} \qquad (1)$$

$$x^2 + 5^2 = (y + 3)^2 \qquad \text{(समकोण Δ OPT लेकर)} \qquad (2)$$

(1) को (2) में से घटाकर, हम पाते हैं

$$25 = 6y - 7 \quad \text{या} \quad y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

इसलिए
$$x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{16}{9}(16 + 9) = \frac{16 \times 25}{9} \qquad [(1) \text{ से}]$$

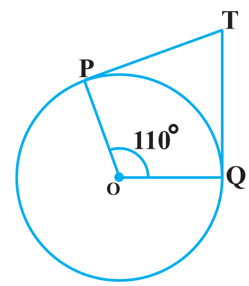
या
$$x = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

प्रश्नावली 10.2

प्रश्न सं. 1, 2, 3 में सही विकल्प चुनिए एवं उचित कारण दीजिए।

1. एक बिंदु Q से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 24 cm तथा Q की केंद्र से दूरी 25 cm है। वृत्त की त्रिज्या है:

(A) 7 cm (B) 12 cm
(C) 15 cm (D) 24.5 cm



आकृति 10.11

2. आकृति 10.11 में, यदि TP, TQ केंद्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\angle POQ = 110°$, तो $\angle PTQ$ बराबर है:

(A) 60° (B) 70°
(C) 80° (D) 90°

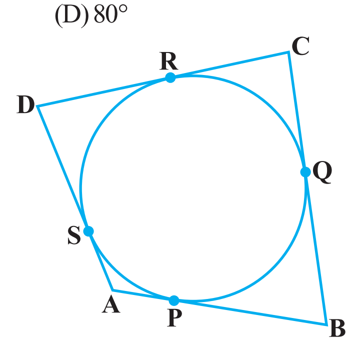
3. यदि एक बिंदु P से O केंद्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 80° के कोण पर झुकी हों, तो $\angle POA$ बराबर है :

(A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80°

4. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।

5. सिद्ध कीजिए कि स्पर्श बिंदु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लंब वृत्त के केंद्र से होकर जाता है।

6. एक बिंदु A से, जो एक वृत्त के केंद्र से 5 cm दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4 cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



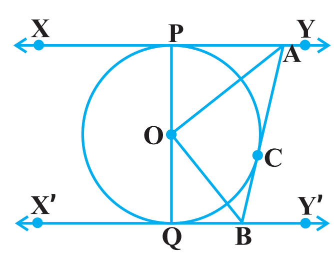
आकृति 10.12

7. दो संकेंद्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 cm तथा 3 cm हैं। बड़े वृत्त की उस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो।

8. एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज ABCD खींचा गया है (देखिए आकृति 10.12)। सिद्ध कीजिए :

$$AB + CD = AD + BC$$

9. आकृति 10.13 में XY तथा X′Y′, O केंद्र वाले किसी वृत्त पर दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिंदु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा X′Y′ को B पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि $\angle AOB = 90°$ है।

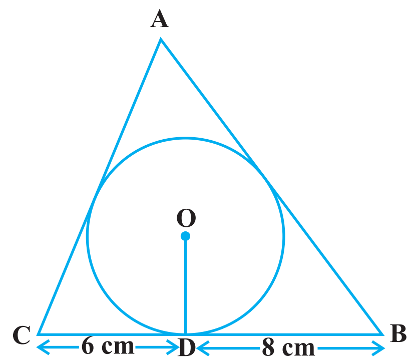


आकृति 10.13

10. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिंदु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है।

11. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

12. 4 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के परिगत एक त्रिभुज ABC इस प्रकार खींचा गया है कि रेखाखंड BD और DC (जिनमें स्पर्श बिंदु D द्वारा BC विभाजित है) की लंबाइयाँ क्रमशः 8 cm और 6 cm हैं (देखिए आकृति 10.14)। भुजाएँ AB और AC ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.14

13. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के परिगत बनी चतुर्भुज की आमने-सामने की भुजाएँ केंद्र पर संपूरक कोण अंतरित करती हैं।

10.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्न तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. वृत्त की स्पर्श रेखा का अर्थ।

2. वृत्त की स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।

3. बाह्य बिंदु से किसी वृत्त पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ समान होती हैं।

रचनाएँ (Constructions) 11

1063CH11

11.1 भूमिका

कक्षा IX में, आपने एक पटरी तथा परकार का प्रयोग करके कुछ रचनाएँ की थी, जैसे किसी कोण को समद्विभाजित करना, किसी रेखाखंड का लंब समद्विभाजक खींचना, कुछ त्रिभुजों की रचनाएँ करना इत्यादि तथा उनका औचित्य भी दिया था। इस अध्याय में, हम पिछली रचनाओं के ज्ञान का उपयोग करते हुए, कुछ और रचनाओं का अध्ययन करेंगे। ये रचनाएँ क्यों हो जाती हैं, इनसे संबंधित कुछ गणितीय व्याख्या भी आपको देनी होगी।

11.2 रेखाखंड का विभाजन

मान लीजिए कि एक रेखाखंड दिया है और आपको उसे एक दिए गए अनुपात, माना 3 : 2 में विभाजित करना है। आप इसकी लंबाई माप कर तथा दिए गए अनुपात के अनुसार एक बिंदु चिह्नित कर सकते हैं। परंतु यदि आपके पास इसे सही-सही मापने की कोई विधि न हो, तो आप इस बिंदु को कैसे प्राप्त करेंगे? इस प्रकार के बिंदु को प्राप्त करने के लिए, हम निम्नलिखित दो विधियाँ दे रहे हैं:

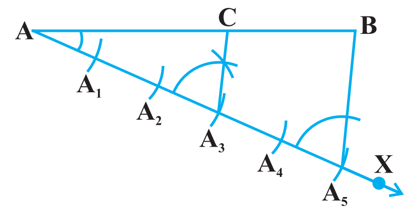
रचना 11.1 : *एक रेखाखंड को दिए हुए अनुपात में विभाजित करना।*

एक रेखाखंड AB दिया है, हम इसको $m : n$ के अनुपात में विभाजित करना चाहते हैं। प्रक्रिया को समझने में सहायता करने के लिए, हम $m = 3$ और $n = 2$ लेंगे।

रचना के चरण:

1. AB से न्यूनकोण बनाती कोई किरण AX खींचिए।
2. AX पर 5 $(= m + n)$ बिंदु A_1, A_2, A_3, A_4 और A_5 इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ हो।
3. BA_5 को मिलाइए।

4. बिंदु A_3 ($m = 3$) से होकर जाने वाली A_5B के समांतर एक रेखा (A_3 पर $\angle AA_5B$ के बराबर कोण बनाकर) AB को एक बिंदु C पर प्रतिच्छेद करती हुई खींचिए (देखिए आकृति 11.1)।
   तब, AC : CB = 3 : 2 है।



आकृति 11.1

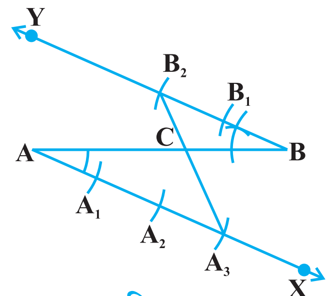
आइए देखें कि यह विधि कैसे हमें अभीष्ट विभाजन देती है।

क्योंकि A_3C, A_5B के समांतर है,

अतः $$\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{AC}{CB}$$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय द्वारा)

रचना से, $\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{3}{2}$ है। अतः $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$ है।

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि बिंदु C, AB को 3 : 2 अनुपात में विभाजित करता है।



आकृति 11.2

वैकल्पिक विधि

रचना के चरण :

1. AB से न्यूनकोण बनाती कोई किरण AX खींचिए।
2. $\angle BAX$ के बराबर $\angle ABY$ बनाकर AX के समांतर एक किरण BY खींचिए।
3. AX पर बिंदु A_1, A_2, A_3 ($m = 3$) और BY पर बिंदु B_1, B_2 ($n = 2$) इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = BB_1 = B_1B_2$ हो।
4. A_3B_2 को मिलाइए। माना यह AB को बिंदु C पर प्रतिच्छेद करती है (देखिए आकृति 11.2)।

तब, AC : CB = 3 : 2 है।

आइए देखें कि इस विधि से हमें अभीष्ट रचना किस प्रकार प्राप्त होता है?

यहाँ $\Delta\, AA_3C \sim \Delta\, BB_2C$ (क्यों?)

तब $$\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{AC}{BC}$$

परंतु रचना द्वारा $\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{3}{2}$ है। अत:, $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$

वास्तव में इन विधियों द्वारा दिये गये रेखाखंड को किसी भी अनुपात में विभाजित किया जा सकता है।

अब हम ऊपर दी गई रचना को एक दिए गए त्रिभुज के समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना करने में उपयोग करेंगे जिसकी भुजाओं और दिए गए त्रिभुज की संगत भुजाओं में एक अनुपात दिया हुआ हो।

रचना 11.2 : *एक दिए गए स्केल गुणक के अनुसार दिए गए त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज की रचना करना।*

इस रचना की दो स्थितियाँ हैं। एक में, जिस त्रिभुज की रचना करनी है, वह दिए गए त्रिभुज से छोटा हो तथा दूसरी में वह बड़ा हो। यहाँ **स्केल गुणक** का अर्थ रचना करने वाले त्रिभुज की भुजाओं तथा दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं के अनुपात से है। (अध्याय 6 भी देखिए)। इन रचनाओं को समझने के लिए आइए निम्न उदाहरण लें।

यही विधि व्यापक स्थिति में भी लागू होगी।

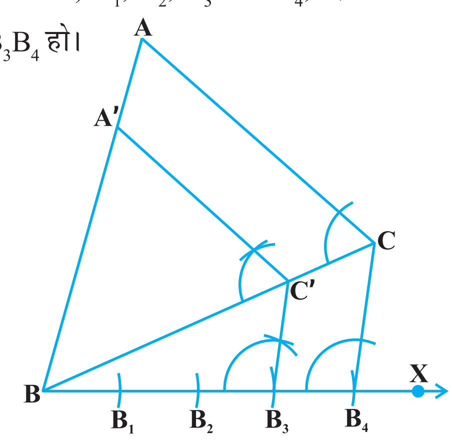
उदाहरण 1 : एक दिए गए त्रिभुज ABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए गए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{3}{4}$ हों (अर्थात् स्केल गुणक $\frac{3}{4}$ है)।

हल : एक त्रिभुज ABC दिया है। हमें एक अन्य त्रिभुज की रचना करनी है, जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की $\frac{3}{4}$ हों।

रचना के चरण:

1. BC से शीर्ष A की दूसरी ओर न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण BX खींचिए।
2. BX पर 4 बिंदु ($\frac{3}{4}$ में 3 और 4 में से बड़ी संख्या) B_1, B_2, B_3 और B_4, इस प्रकार अंकित कीजिए कि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ हो।
3. B_4C मिलाइए और B_3 (तीसरे बिंदु, यहाँ $\frac{3}{4}$ में 3 और 4 में से 3 छोटी है) से होकर जाने वाली B_4C के समांतर एक रेखा BC को C′ पर प्रतिच्छेद करती हुई खींचिए।
4. C′ से होकर जाने वाली CA के समांतर एक रेखा BA को A′ पर प्रतिच्छेद करती हुई खींचिए (देखिए आकृति 11.3)।

तब, Δ A′BC′ अभीष्ट त्रिभुज है।



आकृति 11.3

आइए देखें कि इस रचना से कैसे अभीष्ट त्रिभुज प्राप्त हो जाता है।

रचना 11.1 से, $\frac{BC'}{C'C} = \frac{3}{1}$

इसलिए, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BC' + C'C}{BC'} = 1 + \frac{C'C}{BC'} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, अर्थात् $\frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$ है।

साथ ही, C′A′, CA के समांतर है। इसलिए $\Delta A'BC' \sim \Delta ABC$ (क्यों?)

अतः, $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$

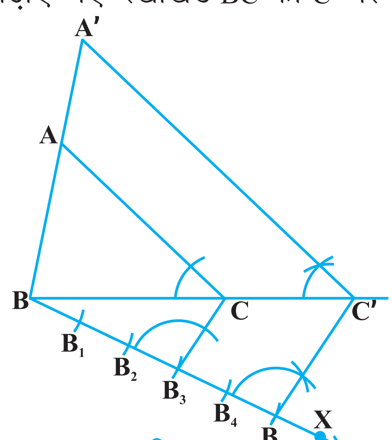
उदाहरण 2 : एक दिए गए त्रिभुज ABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की $\frac{5}{3}$ हों (अर्थात् स्केल गुणक $\frac{5}{3}$ है)।

हल : एक त्रिभुज ABC दिया गया है। हमें एक त्रिभुज की रचना करनी है, जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं की $\frac{5}{3}$ हों।

रचना के चरण:

1. BC से शीर्ष A के दूसरी ओर न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण BX खींचिए।
2. 5 ($\frac{5}{3}$ में 5 और 3 में से बड़ी संख्या) बिंदु B_1, B_2, B_3, B_4 और B_5, BX पर इस प्रकार अंकित कीजिए कि $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ हो।
3. B_3 (तीसरा बिंदु, $\frac{5}{3}$ में 5 और 3 में से छोटी संख्या) को C से मिलाइए और B_5 से होकर जाने वाली B_3C के समांतर एक रेखा, बढ़ाए गए रेखाखंड BC को C′ पर प्रतिच्छेद करती हुई खींचिए।
4. C′ से होकर जाने वाली CA के समांतर एक रेखा, बढ़ाने पर रेखाखंड BA को A′ पर प्रतिच्छेद करती हुई खींचिए (देखिए आकृति 11.4)।

   तब, A′BC′ अभीष्ट त्रिभुज है।



आकृति 11.4

रचना के औचित्य सिद्ध करने के लिए, ध्यान दीजिए $\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ (क्यों?)

इसलिए $\frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{BC'}$ है।

परंतु $\frac{BC}{BC'} = \frac{BB_3}{BB_5} = \frac{3}{5}$ है।

इसलिए $\frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$ है और इसीलिए $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$ है।

टिप्पणी : उदाहरण 1 और 2 में आप AB अथवा AC से न्यूनकोण बनाती हुई किरण भी ले सकते थे और उसी प्रकार आगे बढ़ सकते थे।

प्रश्नावली 11.1

निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

1. 7.6 cm लंबा एक रेखाखंड खींचिए और इसे 5 : 8 अनुपात में विभाजित कीजिए। दोनों भागों को मापिए।
2. 4 cm, 5 cm और 6 cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{2}{3}$ गुनी हों।
3. 5 cm, 6 cm और 7 cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिये हुऐ त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{7}{5}$ गुनी हों।
4. आधार 8 cm तथा ऊँचाई 4 cm के एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ इस समद्विबाहु त्रिभुज की संगत भुजाओं की $1\frac{1}{2}$ गुनी हों।
5. एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें BC = 6 cm, AB = 5 cm और $\angle ABC = 60°$ हो। फिर एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं की $\frac{3}{4}$ गुनी हों।
6. एक त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें BC = 7 cm, $\angle B = 45°$, $\angle A = 105°$ हो। फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं की $\frac{4}{3}$ गुनी हों।
7. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ (कर्ण के अतिरिक्त) 4 cm तथा 3 cm लंबाई की हों। फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{5}{3}$ गुनी हों।

11.3 किसी वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना

आप पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं कि यदि कोई बिंदु वृत्त के अंदर स्थित है, तो इस बिंदु से जाने वाली वृत्त की कोई स्पर्श रेखा नहीं हो सकती है। परंतु यदि बिंदु वृत्त पर स्थित है, तो उस बिंदु पर वृत्त की एक और केवल एक स्पर्श रेखा होती है, जो उस बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है। अतः यदि आप वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा खींचना चाहते हैं, तो केवल उस बिंदु से जाने वाली त्रिज्या खींचिए और उसी बिंदु पर इसकी लंब रेखा खींचिए। तब, यही अभीष्ट स्पर्श रेखा होगी।

आपने यह भी देखा है कि यदि बिंदु वृत्त के बाहर स्थित है, तो इस बिंदु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ होती हैं।

अब हम देखेंगे कि कैसे इन स्पर्श रेखाओं को खींचा जाता है।

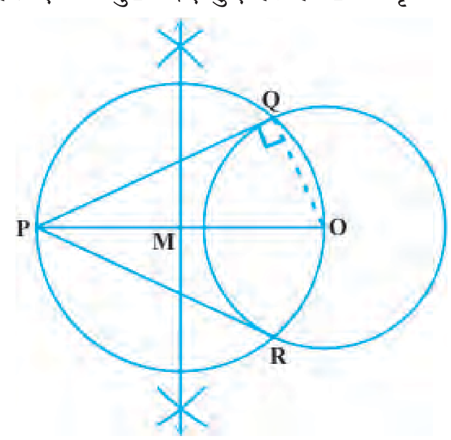
रचना 11.3 : *एक वृत्त के बाहर स्थित एक बिंदु से उस पर स्पर्श रेखाओं की रचना करना।*

हमें एक वृत्त जिसका केंद्र O है तथा इसके बाहर एक बिंदु P दिए हुए हैं। हमें P से वृत्त पर दोनों स्पर्श रेखाएँ खींचनी हैं।

रचना के चरण :

1. PO को मिलाइए और इसे समद्विभाजित करिए। माना PO का मध्य बिंदु M है।
2. M को केंद्र मान कर तथा MO त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए। माना यह दिए गए वृत्त को Q और R पर प्रतिच्छेद करता है।
3. P को Q तथा R से मिलाइये।

   तब, PQ और PR अभीष्ट दो स्पर्श रेखाएँ है। (देखिए आकृति 11.5)।



आकृति 11.5

आइए अब देखें कि इस रचना से हमें स्पर्श रेखाएँ किस प्रकार मिलती हैं। OQ को मिलाइए। तब, $\angle$ PQO अर्धवृत्त में बना एक कोण है और इसीलिए

$$\angle PQO = 90^\circ \text{ है।}$$

क्या हम कह सकते हैं कि $PQ \perp OQ$ है?

क्योंकि, OQ दिए वृत्त की त्रिज्या है, इसलिए PQ वृत्त की स्पर्श रेखा ही होगी। इसी प्रकार, PR भी वृत्त की स्पर्श रेखा है।

टिप्पणी : यदि वृत्त का केंद्र नहीं दिया है, तो आप कोई दो असमांतर जीवाएँ लेकर तथा उनके लंब समद्विभाजकों के प्रतिच्छेद बिंदु के रूप में केंद्र ज्ञात कर सकते हैं। इसके बाद, आप उपर्युक्त रूप से आगे बढ़ सकते हैं।

प्रश्नावली 11.2

निम्न में से प्रत्येक के लिए रचना का औचित्य भी दीजिए:

1. 6 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। केंद्र से 10 cm दूर स्थित एक बिंदु से वृत्त पर स्पर्श रेखा युग्म की रचना कीजिए और उनकी लंबाइयाँ मापिए।
2. 4 cm त्रिज्या के एक वृत्त पर 6 cm त्रिज्या के एक सकेंद्रीय वृत्त के किसी बिंदु से एक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए और उसकी लंबाई मापिए। परिकलन से इस माप की जाँच भी कीजिए।
3. 3 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसके किसी बढ़ाए गए व्यास पर केंद्र से 7 cm की दूरी पर स्थित दो बिंदु P और Q लीजिए। इन दोनों बिंदुओं से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए।
4. 5 cm त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए, जो परस्पर 60° के कोण पर झुकी हों।
5. 8 cm लंबा एक रेखाखंड AB खींचिए। A को केंद्र मान कर 4 cm त्रिज्या का एक वृत्त तथा B को केंद्र लेकर 3 cm त्रिज्या का एक अन्य वृत्त खींचिए। प्रत्येक वृत्त पर दूसरे वृत्त के केंद्र से स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।
6. माना ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें AB = 6 cm, BC = 8 cm तथा $\angle B = 90°$ है। B से AC पर BD लंब है। बिंदुओं B, C, D से होकर जाने वाला एक वृत्त खींचा गया है। A से इस वृत्त पर स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।
7. किसी चूड़ी की सहायता से एक वृत्त खींचिए। वृत्त के बाहर एक बिंदु लीजिए। इस बिंदु से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।

11.4 सारांश

इस अध्याय में, आपने देखा है कि निम्न रचनाएँ किस प्रकार की जाती हैं :

1. एक रेखाखंड को एक दिए गए अनुपात में विभाजित करना।
2. एक दिए गए त्रिभुज के समरूप त्रिभुज की रचना करना जबकि स्केल गुणक दिया गया हो (स्केल गुणक एक से कम या एक से अधिक हो सकता है)।
3. किसी बाह्य बिंदु से किसी वृत्त पर एक स्पर्श रेखा युग्म की रचना करना।

पाठकों के लिए विशेष

रचना 11.2 के उदाहरणों 1 तथा 2 के चरणों का अनुसरण करते हुए, एक दिये हुए चतुर्भुज (या बहुभुज) के समरूप अन्य चतुर्भुज (या बहुभुज) की, दिये हुए स्केल गुणक के अनुसार, रचना की जा सकती है।

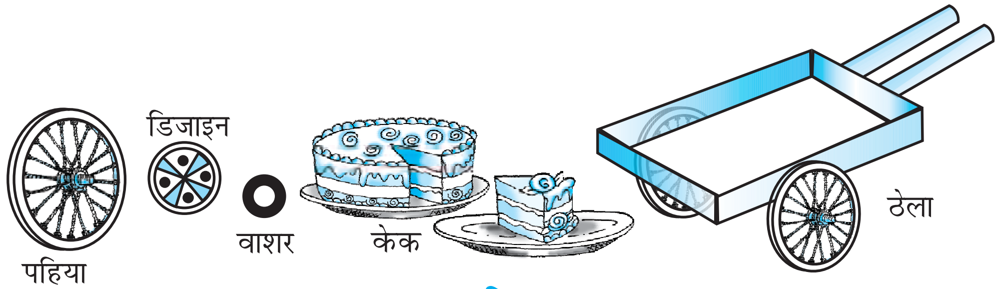
T063CH12

वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल 12

(Areas Related to Circles)

12.1 भूमिका

आप, अपनी पिछली कक्षाओं से, सरल समतल आकृतियों, जैसे आयत, वर्ग, समांतर चतुर्भुज, त्रिभुज और वृत्त के परिमापों और क्षेत्रफलों को ज्ञात करने की कुछ विधियों से पहले से परिचित हैं। दैनिक जीवन में हमें जो वस्तुएँ देखने को मिलती हैं, उनमें से अनेक एक न एक रूप में वृत्तीय आकार से संबंधित होती हैं। साइकिल के पहिए, ठेला, डार्टबोर्ड (dartboard) (ऐसा बोर्ड जिस पर तीर फेंक कर खेल सकते हैं), गोल केक (cake), पापड़, नाली के ढक्कन, विभिन्न बनावट की चूड़ियाँ, ब्रूच (brooches), वृत्ताकार पथ, वाशर, फूलों की क्यारियाँ इत्यादि ऐसी वस्तुओं के कुछ उदाहरण हैं (देखिए आकृति 12.1)। अतः, वृत्तीय आकृतियों के परिमापों और क्षेत्रफलों को ज्ञात करने की समस्याएँ व्यावहारिक रूप से बहुत महत्वपूर्ण हैं। इस अध्याय में, हम अपनी चर्चा एक वृत्त के परिमाप (परिधि) और क्षेत्रफल की संकल्पनाओं की समीक्षा से प्रारंभ करेंगे तथा इस ज्ञान का वृत्तीय क्षेत्र (संक्षिप्त रूप से वृत्त) के दो विशेष 'भागों' के क्षेत्रफल ज्ञात करने में करेंगे, जिन्हें *त्रिज्यखंड (sector)* और *वृत्तखंड (segment of a circle)* कहते हैं। हम यह भी देखेंगे कि वृत्तों या उनके भागों से संबद्ध समतल आकृतियों के कुछ संयोजनों के क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात किए जाएँ।



आकृति 12.1

12.2 वृत्त का परिमाप और क्षेत्रफल - एक समीक्षा

आपको याद होगा कि एक वृत्त के अनुदिश एक बार चलने में तय की गई दूरी उसका *परिमाप* होता है, जिसे प्राय: *परिधि (circumference)* कहा जाता है। आप पिछली कक्षाओं से यह भी जानते हैं कि वृत्त की परिधि का उसके व्यास के साथ एक अचर अनुपात होता है। इस अचर अनुपात को एक यूनानी अक्षर π (जिसे 'पाई' पढ़ा जाता है) से व्यक्त किया जाता है। दूसरे शब्दों में,

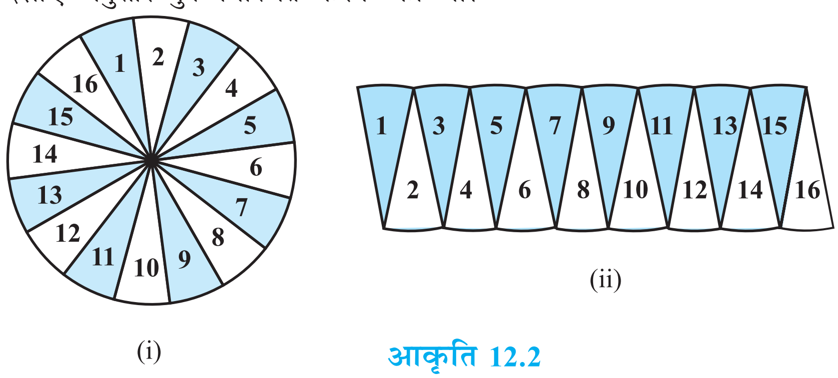
$$\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$$

या

$$\text{परिधि} = \pi \times \text{व्यास}$$
$$= \pi \times 2r \qquad (\text{जहाँ } r \text{ वृत्त की त्रिज्या है})$$
$$= 2\pi r$$

एक महान भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट (476 – 550 ई.पू.) ने π का एक सन्निकट मान दिया। उन्होंने कहा कि $\pi = \frac{62832}{20000}$ होता है, जो लगभग 3.1416 के बराबर है। इस बात को ध्यान देना भी रुचिपूर्ण है कि एक महान प्रतिभाशाली भारतीय गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन (1887–1920) की एक सर्वसमिका का प्रयोग करके, गणितज्ञ π का मान दशमलव के लाखों स्थानों तक परिकलित करने में समर्थ हो सके हैं। जैसा कि आप कक्षा IX के अध्याय 1 से जानते हैं कि π एक अपरिमेय (irrational) संख्या है और इसका दशमलव प्रसार अनवसानी और अनावर्ती (non-terminating and non-repeating) होता है। परंतु व्यावहारिक कार्यों के लिए हम प्राय: यह मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 लेते हैं।

आपको याद होगा कि वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 होता है। याद कीजिए कि आपने कक्षा VII में इसकी जाँच, एक वृत्त को अनेक त्रिज्यखंडों में काट कर और फिर उन्हें आकृति 12.2 में दर्शाए अनुसार पुनर्व्यवस्थित करके की थी।



आकृति 12.2

आप आकृति 12.2 (ii) में आकार देख सकते हैं, एक आयत की लगभग लंबाई $\frac{1}{2} \times 2\pi r$ है और चौड़ाई r है। इससे सुझाव मिलता है कि वृत्त का क्षेत्रफल= $\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$ $= \pi r^2$ है। आइए पिछली कक्षाओं में पढ़ी गई अवधारणाओं को एक उदाहरण की सहायता से याद करें।

उदाहरण 1 : एक वृत्ताकार खेत पर ₹ 24 प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय ₹ 5280 है। इस खेत की ₹ 0.50 प्रति वर्ग मीटर की दर से जुताई कराई जानी है। खेत की जुताई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)।

हल : बाड़ की लंबाई (मीटर में) = $\frac{\text{पूरा व्यय}}{\text{दर}} = \frac{5280}{24} = 220$

अत:, खेत की परिधि = 220 m

इसलिए यदि खेत की त्रिज्या r मीटर है, तो

$$2\pi r = 220$$

या $$2 \times \frac{22}{7} \times r = 220$$

या $$r = \frac{220 \times 7}{2 \times 22} = 35$$

अर्थात् खेत की त्रिज्या 35 मीटर है।

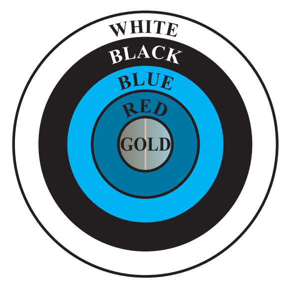
अत: खेत का क्षेत्रफल = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times 35 \times 35 \text{ m}^2 = 22 \times 5 \times 35 \text{ m}^2$

अब 1 m^2 खेत की जुताई का व्यय = ₹ 0.50

अत: खेत की जुताई कराने का कुल व्यय = $22 \times 5 \times 35 \times 0.50$ = ₹ 1925

प्रश्नावली 12.1

(जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए)



आकृति 12.3

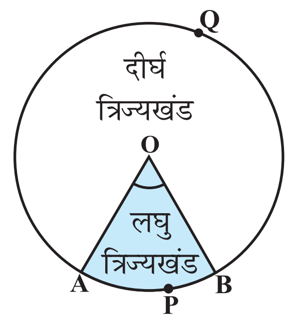
1. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमश: 19 cm और 9 cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है।
2. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमश: 8 cm और 6 cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।
3. आकृति 12.3 एक तीरंदाजी लक्ष्य को दर्शाती है, जिसमें केंद्र से बाहर की ओर पाँच क्षेत्र GOLD, RED, BLUE, BLACK और WHITE चिह्नित हैं, जिनसे अंक अर्जित किए जा सकते हैं। GOLD अंक वाले क्षेत्र का व्यास 21 cm है तथा प्रत्येक अन्य पट्टी 10.5 cm चौड़ी है। अंक प्राप्त कराने वाले इन पाँचों क्षेत्रों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. किसी कार के प्रत्येक पहिए का व्यास 80 cm है। यदि यह कार 66 km प्रति घंटे की चाल से चल रही है, तो 10 मिनट में प्रत्येक पहिया कितने चक्कर लगाती है?

5. निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए तथा अपने उत्तर का औचित्य दीजिए:
यदि एक वृत्त का परिमाप और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर है, तो उस वृत्त की त्रिज्या है:
(A) 2 मात्रक (B) π मात्रक (C) 4 मात्रक (D) 7 मात्रक

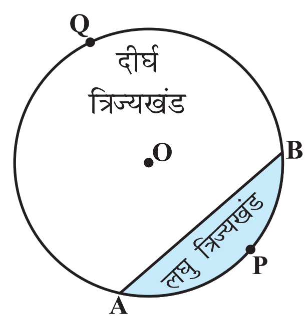
12.3 त्रिज्यखंड और वृत्तखंड के क्षेत्रफल

आप पिछली कक्षाओं में शब्दों *त्रिज्यखंड (sector) और वृत्तखंड (segment of a circle)* से पूर्व परिचित हैं। आपको याद होगा कि एक वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो दो त्रिज्याओं और संगत चाप से घिरा (परिबद्ध) हो, उस वृत्त का एक त्रिज्यखंड कहलाता है तथा वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो एक जीवा और संगत चाप के बीच में परिबद्ध हो एक *वृत्तखंड* कहलाता है। इस प्रकार, आकृति 12.4 में, छायांकित भाग OAPB केंद्र O वाले वृत्त का एक त्रिज्यखंड है। $\angle$ AOB इस *त्रिज्यखंड का कोण* कहलाता है। ध्यान दीजिए कि इसी आकृति में अछायांकित भाग OAQB भी वृत्त का त्रिज्यखंड है। स्पष्ट कारणों से OAPB एक *लघु त्रिज्यखंड (minor sector)* कहलाता है तथा OAQB एक दीर्घ त्रिज्यखंड (major sector) कहलाता है। आप यह भी देख सकते हैं कि इस दीर्घ त्रिज्यखंड का कोण $360° - \angle$ AOB है।



आकृति 12.4

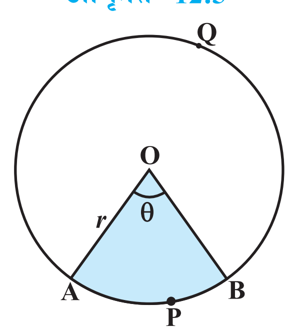
अब आकृति 12.5 को देखिए, जिसमें AB केंद्र O वाले वृत्त की एक जीवा है। अत: छायांकित भाग APB एक वृत्तखंड है। आप यह भी देख सकते हैं कि अछायांकित भाग AQB भी जीवा AB द्वारा निर्मित एक अन्य वृत्तखंड है। स्पष्ट कारणों से, APB *लघु वृत्तखंड* कहलाता है तथा AQB *दीर्घ वृत्तखंड* कहलाता है।



आकृति 12.5

टिप्पणी : जब तक अन्यथा न कहा जाए, 'वृत्तखंड' और 'त्रिज्यखंड' लिखने से हमारा तात्पर्य क्रमश: लघु वृत्तखंड और लघु त्रिज्यखंड से होगा।

आइए उपरोक्त ज्ञान के आधार पर, इनके क्षेत्रफलों के परिकलित करने के कुछ संबंध (या सूत्र) ज्ञात करने का प्रयत्न करें।



आकृति 12.6

मान लीजिए OAPB केंद्र O और त्रिज्या r वाले वृत्त का एक त्रिज्यखंड है (देखिए आकृति 12.6)। मान लीजिए $\angle$ AOB का अंशीय (degree) माप θ है।

आप जानते हैं कि एक वृत्त [वस्तुतः एक वृत्तीय क्षेत्र या चकती (disc)] का क्षेत्रफल πr^2 होता है।

एक तरीके से, हम इस वृत्तीय क्षेत्र को केंद्र O पर 360° का कोण बनाने वाला (अंशीय माप 360) एक त्रिज्यखंड मान सकते हैं। फिर ऐकिक विधि (Unitary Method) का प्रयोग करके, हम त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल नीचे दर्शाए अनुसार ज्ञात कर सकते हैं:

जब केंद्र पर बने कोण का अंशीय माप 360 है, तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

अतः, जब केंद्र पर बने कोण का अंशीय माप 1 है, तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\pi r^2}{360}$

इसलिए जब केंद्र पर बने कोण का अंशीय माप θ है, तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

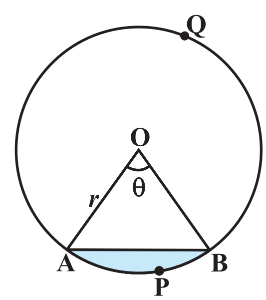
$$= \frac{\pi r^2}{360} \times \theta = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

इस प्रकार, हम वृत्त के एक त्रिज्यखंड के क्षेत्रफल के लिए, निम्नलिखित संबंध (या सूत्र) प्राप्त करते हैं:

कोण θ वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2$,

जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है और θ त्रिज्यखंड का अंशों में कोण है।

अब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है: क्या हम इस त्रिज्यखंड की संगत चाप APB की लंबाई ज्ञात कर सकते हैं। हाँ, हम ऐसा कर सकते हैं। पुनः, ऐकिक विधि का प्रयोग करने तथा संपूर्ण वृत्त (360° कोण वाले) की लंबाई $2\pi r$ लेने पर, हम चाप APB की वांछित लंबाई $\dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$ प्राप्त करते हैं।



आकृति 12.7

अतः **कोण θ वाले त्रिज्यखंड के संगत चाप की लंबाई $= \dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$**

आइए अब केंद्र O और त्रिज्या r वाले वृत्तखंड APB के क्षेत्रफल पर विचार करें (देखिए आकृति 12.7)। आप देख सकते हैं कि

वृत्तखंड APB का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल – Δ OAB का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta \text{OAB का क्षेत्रफल}$$

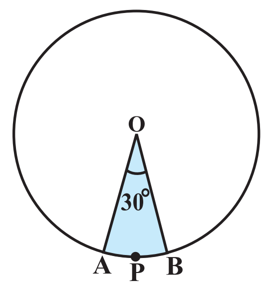
टिप्पणी : क्रमशः आकृति 12.6 और आकृति 12.7 से, आप देख सकते हैं कि

दीर्घ त्रिज्यखंड OAQB का क्षेत्रफल = πr^2 – लघु त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल

तथा दीर्घ वृत्तखंड AQB का क्षेत्रफल = πr^2 – लघु वृत्तखंड APB का क्षेत्रफल

अब आइए इन अवधारणाओं (या परिणामों) को समझने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 2 : त्रिज्या 4 cm वाले एक वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 30° है। साथ ही, संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।



आकृति 12.8

हल : दिया हुआ त्रिज्यखंड OAPB है (देखिए आकृति 12.8)।

$$\text{त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{12.56}{3} \text{ cm}^2 = 4.19 \text{cm}^2 \text{ (लगभग)}$$

संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \pi r^2 - \text{त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल}$$

$$= (3.14 \times 16 - 4.19) \text{ cm}^2$$

$$= 46.05 \text{ cm}^2 = 46.1 \text{ cm}^2 \text{ (लगभग)}$$

वैकल्पिक रूप से,

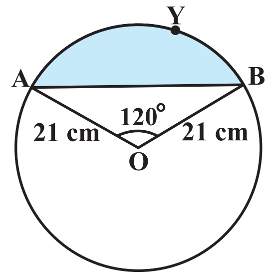
$$\text{दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} = \frac{(360 - \theta)}{360} \times \pi r^2$$

$$= \left(\frac{360 - 30}{360}\right) \times 3.14 \times 16 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16 \text{cm}^2 = 46.05 \text{ cm}^2$$

$$= 46.1 \text{ cm}^2 \text{ (लगभग)}$$

उदाहरण 3 : आकृति 12.9 में दर्शाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि वृत्त की त्रिज्या 21 cm है और $\angle$ AOB = 120° है। [$\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए]



आकृति 12.9

हल : वृत्तखंड AYB का क्षेत्रफल

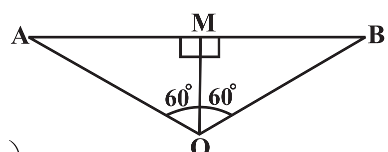
= त्रिज्यखंड OAYB का क्षेत्रफल – Δ OAB का क्षेत्रफल (1)

अब, त्रिज्यखंड OAYB का क्षेत्रफल $= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ cm}^2 = 462 \text{ cm}^2$ (2)

Δ OAB का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए OM ⊥ AB खींचिए, जैसाकि आकृति 12.10 में दिखाया गया है।

ध्यान दीजिए कि OA = OB है। अत:, RHS सर्वांगसमता से, Δ AMO ≅ Δ BMO है।

इसलिए M जीवा AB का मध्य-बिंदु है तथा $\angle \text{AOM} = \angle \text{BOM} = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$ है।



आकृति 12.10

मान लीजिए OM = x cm है।

इसलिए Δ OMA से, $\frac{\text{OM}}{\text{OA}} = \cos 60°$

या $\frac{x}{21} = \frac{1}{2} \quad \left(\cos 60° = \frac{1}{2}\right)$

या $x = \frac{21}{2}$

अत: $\text{OM} = \frac{21}{2}$ cm

साथ ही $\frac{\text{AM}}{\text{OA}} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अत: $\text{AM} = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ cm

इसलिए $\text{AB} = 2\text{ AM} = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 21\sqrt{3} \text{ cm}$

अत: Δ OAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} AB \times OM = \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}\text{ cm}^2$

$$= \frac{441}{4}\sqrt{3}\text{ cm}^2 \quad (3)$$

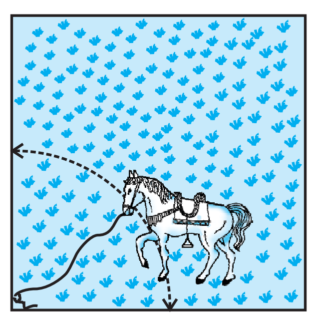
इसलिए वृत्तखंड AYB का क्षेत्रफल $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)\text{ cm}^2$ [(1), (2) और (3) से]

$$= \frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3})\text{ cm}^2$$

अभ्यास 12.2

(जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए।)

1. 6 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है।
2. एक वृत्त के चतुर्थांश (quadrant) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22 cm है।
3. एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लंबाई 14 cm है। इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. 10 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर एक समकोण अंतरित करती है। निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:
   (i) संगत लघु वृत्तखंड (ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखंड ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।
5. त्रिज्या 21 cm वाले वृत्त का एक चाप केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए:
   (i) चाप की लंबाई (ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल
   (iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल
6. 15 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करती है। संगत लघु और दीर्घ वृत्तखंडों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए।)
7. त्रिज्या 12 cm वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 120° का कोण अंतरित करती है। संगत वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
   ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए।)
8. 15 m भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूँटे से एक घोड़े को 5 m लंबी रस्सी से बाँध दिया गया है (देखिए आकृति 12.11)। ज्ञात कीजिए:



आकृति 12.11

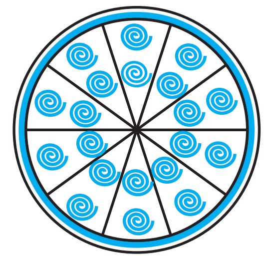
(i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोड़ा घास चर सकता है।

(ii) चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि, यदि घोड़े को 5 m लंबी रस्सी के स्थान पर 10 m लंबी रस्सी से बाँध दिया जाए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

9. एक वृत्ताकार ब्रूच (brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाना है जिसका व्यास 35 mm है। तार को वृत के 5 व्यासों को बनाने में भी प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखंडों में विभाजित करता है जैसा कि आकृति 12.12 में दर्शाया गया है। तो ज्ञात कीजिए:

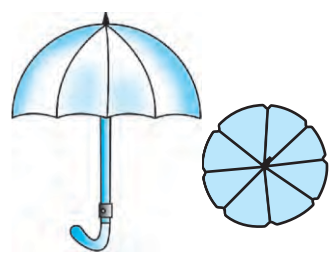
(i) कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई

(ii) ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल



आकृति 12.12

10. एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं (देखिए आकृति 12.13)। छतरी को 45 cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

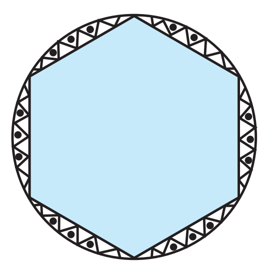


आकृति 12.13

11. किसी कार के दो वाइपर (Wipers) हैं, परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते हैं। प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लंबाई 25 cm है और $115°$ के कोण तक घूम कर सफाई कर सकता है। पत्तियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए।

12. जहाज़ों को समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए, एक लाइट हाउस (light house) $80°$ कोण वाले एक त्रिज्यखंड में 16.5 km की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलाता है। समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें जहाज़ों को चेतावनी दी जा सके। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

13. एक गोल मेज़पोश पर छ: समान डिज़ाइन बने हुए हैं जैसाकि आकृति 12.14 में दर्शाया गया है। यदि मेज़पोश की त्रिज्या 28 cm है, तो ₹ 0.35 प्रति वर्ग सेंटीमीटर की दर से इन डिज़ाइनों को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{3} = 1.7$ का प्रयोग कीजिए)



आकृति 12.14

14. निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए:

त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसका कोण $p°$ है, निम्नलिखित है:

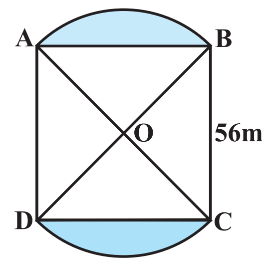
(A) $\frac{p}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{p}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{p}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

12.4 समतल आकृतियों के संयोजनों के क्षेत्रफल

अभी तक हमने विभिन्न आकृतियों के क्षेत्रफल पृथक-पृथक रूप से ज्ञात किए हैं। आइए अब समतल आकृतियों के कुछ संयोजनों (combinations) के क्षेत्रफल ज्ञात करने का प्रयत्न करें। हमें इस प्रकार की आकृतियाँ दैनिक जीवन में तथा विभिन्न रोचक डिज़ाइनों के रूप में देखने को मिलती हैं। फूलों की क्यारियाँ, नालियों के ढक्कन, खिड़कियों के डिज़ाइन, मेज़पोशों पर बने डिज़ाइन आदि ऐसी आकृतियों के कुछ उदाहरण हैं। इन आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करने की प्रक्रिया को हम कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 4 : आकृति 12.15 में, 56 m भुजा वाले एक वर्गाकार लॉन (lawn) ABCD के दो ओर बनी हुई दो वृत्ताकार फूलों की क्यारियाँ दर्शाई गई हैं। यदि प्रत्येक वृत्ताकार क्यारी का केंद्र लॉन के विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु O है, तो वर्गाकार लॉन तथा फूलों की क्यारियों के क्षेत्रफलों का योग ज्ञात कीजिए।

($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए)।



आकृति 12.15

हल : वर्गाकार लॉन ABCD का क्षेत्रफल $= 56 \times 56 \text{ m}^2$ (1)

मान लीजिए $OA = OB = x$ मीटर है।

अतः $x^2 + x^2 = 56^2$

या $2x^2 = 56 \times 56$

या $x^2 = 28 \times 56$ (2)

अब त्रिज्यखंड OAB का क्षेत्रफल $= \frac{90}{360} \times \pi x^2 = \frac{1}{4} \times \pi x^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 \text{ m}^2$ [(2) से] (3)

साथ ही Δ OAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4} \times 56 \times 56 \text{ m}^2$ ($\angle AOB = 90°$) (4)

इसलिए क्यारी AB का क्षेत्रफल $= \left(\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 - \frac{1}{4} \times 56 \times 56\right) \text{m}^2$

[(3) और (4) से]

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} - 2\right) \text{m}^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} \text{m}^2 \qquad (5)$$

इसी प्रकार, दूसरी क्यारी का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} \text{m}^2$ (6)

अत: संपूर्ण क्षेत्रफल $= \left(56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7}\right) \text{m}^2$ [(1), (5) और (6) से]

$$= 28 \times 56 \left(2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}\right) \text{m}^2$$

$$= 28 \times 56 \times \frac{18}{7} \text{m}^2 = 4032 \text{m}^2$$

वैकल्पिक हल :

संपूर्ण क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड OAB का क्षेत्रफल + त्रिज्यखंड ODC का क्षेत्रफल + Δ OAD का क्षेत्रफल + Δ OBC का क्षेत्रफल

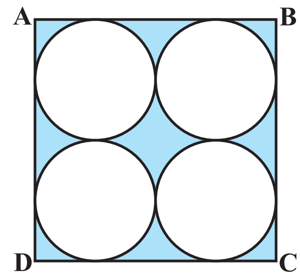
$$= \left(\frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56\right) \text{m}^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} + \frac{22}{7} + 2 + 2\right) \text{m}^2$$

$$= \frac{7 \times 56}{7} (22 + 22 + 14 + 14) \text{m}^2$$

$$= 56 \times 72 \text{ m}^2 = 4032 \text{ m}^2$$

उदाहरण 5 : आकृति 12.16 में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ ABCD भुजा 14 cm का एक वर्ग है।



आकृति 12.16

हल : वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = $14 \times 14 \text{ cm}^2 = 196 \text{ cm}^2$

प्रत्येक वृत्त का व्यास = $\frac{14}{2} \text{cm} = 7 \text{cm}$

इसलिए प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या = $\frac{7}{2} \text{cm}$

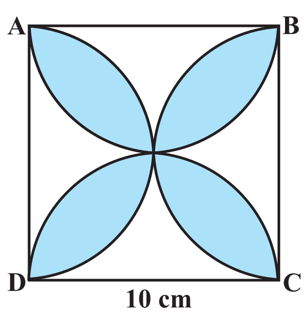
अतः एक वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \text{ cm}^2$

$= \frac{154}{4} \text{cm} = \frac{77}{2} \text{ cm}^2$

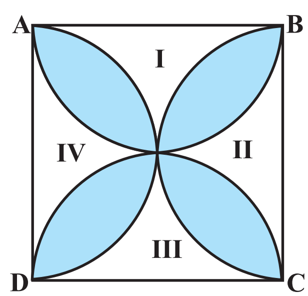
इसलिए चारों वृत्तों का क्षेत्रफल = $4 \times \frac{77}{2} \text{cm}^2 = 154 \text{ cm}^2$

अतः छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = $(196 - 154) \text{ cm}^2 = 42 \text{ cm}^2$

उदाहरण 6 : आकृति 12.17 में, छायांकित डिज़ाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ ABCD भुजा 10 cm का एक वर्ग है तथा इस वर्ग की प्रत्येक भुजा को व्यास मान कर अर्धवृत्त खींचे गए हैं। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)



आकृति 12.17



आकृति 12.18

हल : आइए चार अछायांकित क्षेत्रों को I, II, III और IV से अंकित करें (देखिए आकृति 12.18)।

I का क्षेत्रफल + III का क्षेत्रफल

= ABCD का क्षेत्रफल – दोनों अर्धवृत्तों का क्षेत्रफल, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 5cm है।

$$= \left(10 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 5^2\right) \text{cm}^2 = (100 - 3.14 \times 25) \text{ cm}^2$$

$$= (100 - 78.5) \text{ cm}^2 = 21.5 \text{ cm}^2$$

इसी प्रकार, II का क्षेत्रफल + IV का क्षेत्रफल $= 21.5 \text{ cm}^2$

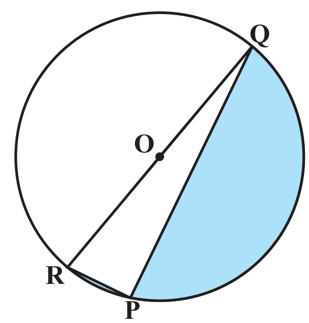
अतः छायांकित डिज़ाइन का क्षेत्रफल= ABCD का क्षेत्रफल – (I + II + III + IV) का क्षेत्रफल

$$= (100 - 2 \times 21.5) \text{ cm}^2 = (100 - 43) \text{ cm}^2 = 57 \text{ cm}^2$$

प्रश्नावली 12.3

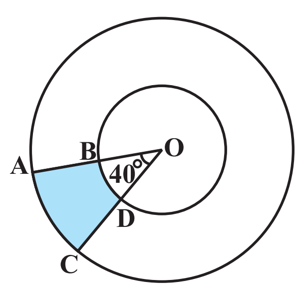
(जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए।)

1. आकृति 12.19 में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि PQ = 24 cm, PR = 7 cm तथा O वृत्त का केंद्र है।

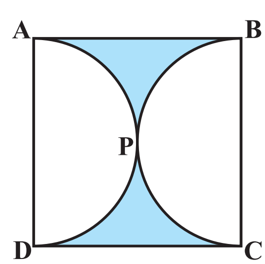


आकृति 12.19

2. आकृति 12.20 में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केंद्र O वाले दोनों सकेंद्रीय (Concentric) वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 7 cm और 14 cm हैं तथा $\angle AOC = 40°$ है।



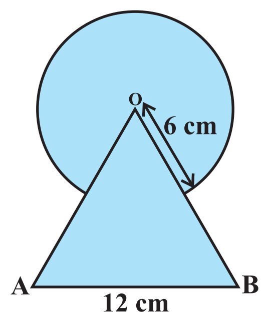
आकृति 12.20



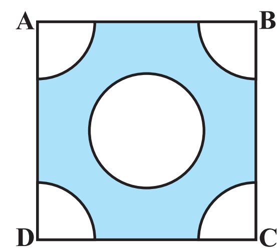
आकृति 12.21

3. आकृति 12.21 में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि ABCD भुजा 14 cm का एक वर्ग है तथा APD और BPC दो अर्धवृत्त हैं।

4. आकृति 12.22 में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ भुजा 12 cm वाले एक समबाहु त्रिभुज OAB के शीर्ष O को केंद्र मान कर 6 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्तीय चाप खींचा गया है।



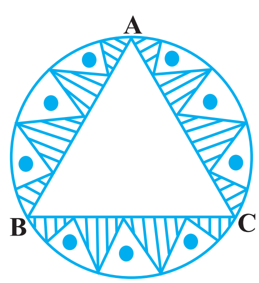
आकृति 12.22



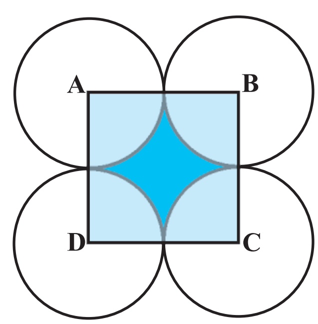
आकृति 12.23

5. भुजा 4 cm वाले एक वर्ग के प्रत्येक कोने से 1 cm त्रिज्या वाले वृत्त का एक चतुर्थांश काटा गया है तथा बीच में 2 cm व्यास का एक वृत्त भी काटा गया है, जैसाकि आकृति 12.23 में दर्शाया गया है। वर्ग के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. एक वृत्ताकार मेज़पोश, जिसकी त्रिज्या 32 cm है, में बीच में एक समबाहु त्रिभुज ABC छोड़ते हुए एक डिज़ाइन बना हुआ है, जैसाकि आकृति 12.24 में दिखाया गया है। इस डिज़ाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



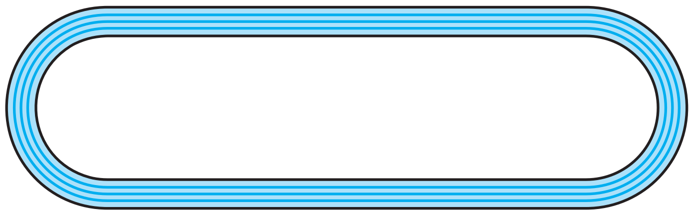
आकृति 12.24



आकृति 12.25

7. आकृति 12.25 में, ABCD भुजा 14 cm वाला एक वर्ग है। A, B, C और D को केंद्र मानकर, चार वृत्त इस प्रकार खींचे गए हैं कि प्रत्येक वृत्त तीन शेष वृत्तों में से दो वृत्तों को बाह्य रूप से स्पर्श करता है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. आकृति 12.26 एक दौड़ने का पथ (racing track) दर्शाती है, जिसके बाएँ और दाएँ सिरे अर्धवृत्ताकार हैं।

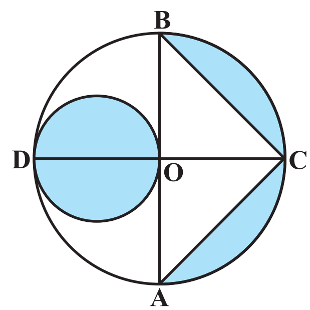


आकृति 12.26

दोनों आंतरिक समांतर रेखाखंडों के बीच की दूरी 60 m है तथा इनमें से प्रत्येक रेखाखंड 106 m लंबा है। यदि यह पथ 10 m चौड़ा है, तो ज्ञात कीजिए।

(i) पथ के आंतरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर लगाने में चली गई दूरी

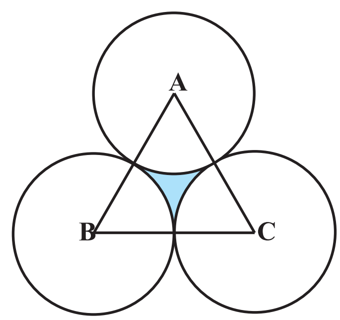
(ii) पथ का क्षेत्रफल



आकृति 12.27

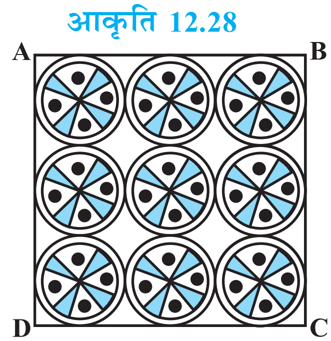
9. आकृति 12.27 में, AB और CD केंद्र O वाले एक वृत्त के दो परस्पर लंब व्यास हैं तथा OD छोटे वृत्त का व्यास है। यदि OA = 7 cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. एक समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 17320.5 cm^2 है। इस त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष को केंद्र मानकर त्रिभुज की भुजा के आधे के बराबर की त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जाता है (देखिए आकृति 12.28)। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 और $\sqrt{3}$ = 1.73205 लीजिए।)



आकृति 12.28

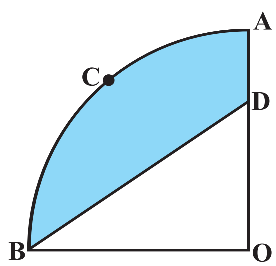
11. एक वर्गाकार रूमाल पर, नौ वृत्ताकार डिज़ाइन बने हैं, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 7 cm है (देखिए आकृति 12.29)। रूमाल के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



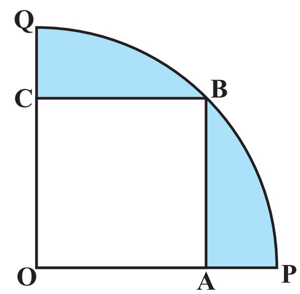
आकृति 12.29

12. आकृति 12.30 में, OACB केंद्र O और त्रिज्या 3.5 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है। यदि OD = 2 cm है, तो निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:

(i) चतुर्थांश OACB (ii) छायांकित भाग।



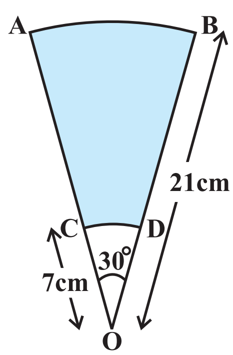
आकृति 12.30



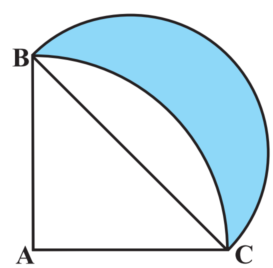
आकृति 12.31

13. आकृति 12.31 में, एक चतुर्थांश OPBQ के अंतर्गत एक वर्ग OABC बना हुआ है। यदि OA = 20 cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 लीजिए।)

14. AB और CD केंद्र O तथा त्रिज्याओं 21 cm और 7 cm वाले दो संकेंद्रीय वृत्तों के क्रमशः दो चाप हैं (देखिए आकृति 12.32)। यदि $\angle$ AOB = 30° है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



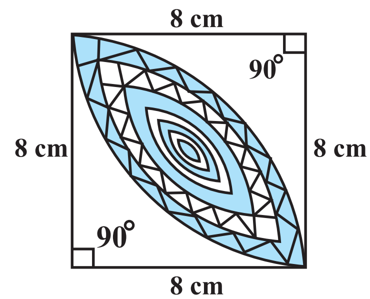
आकृति 12.32



आकृति 12.33

15. आकृति 12.33 में, ABC त्रिज्या 14 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है तथा BC को व्यास मान कर एक अर्धवृत्त खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

16. आकृति 12.34 में, छायांकित डिज़ाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो 8 cm त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों के चतुर्थांशों (quadrants) के बीच उभयनिष्ठ (common) है।



आकृति 12.34

12.5 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है:

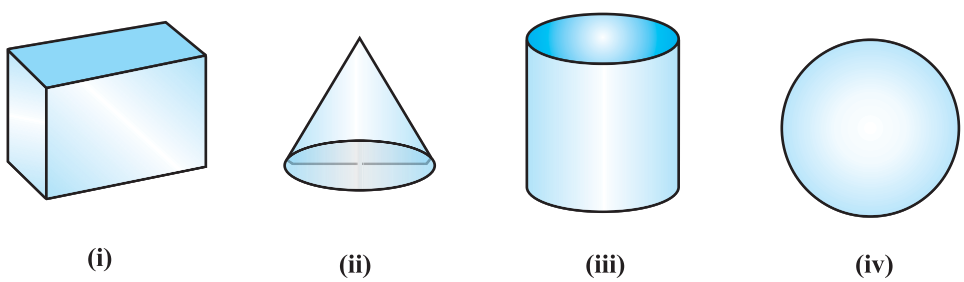
1. त्रिज्या r वाले वृत्त की परिधि $= 2\pi r$
2. त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$
3. त्रिज्या r वाले वृत्त के एक त्रिज्यखंड, जिसका कोण अंशों में θ है, के संगत चाप की लंबाई $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ होती है।
4. त्रिज्या r वाले वृत्त के एक त्रिज्यखंड, जिसका कोण अंशों में θ है, का क्षेत्रफल $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ होता है।
5. एक वृत्तखंड का क्षेत्रफल = संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल – संगत त्रिभुज का क्षेत्रफल

1063CH13

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन 13
(Surface Areas and Volumes)

13.1 भूमिका

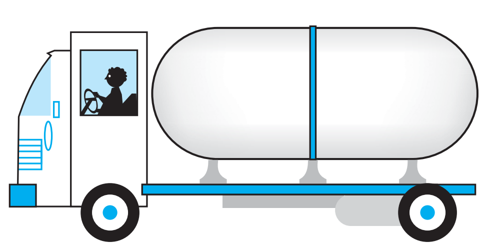
कक्षा IX से, आप कुछ ठोस आकृतियों जैसे घनाभ, शंकु, बेलन और गोला से परिचित हो चुके हैं (देखिए आकृति 13.1)। आप यह भी पढ़ चुके हैं कि इन आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं।

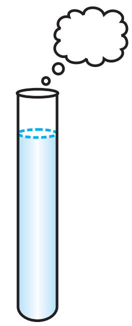


आकृति 13.1

अपने दैनिक जीवन में हमें ऐसे अनेक ठोस देखने को मिलते हैं जो उपरोक्त दो या अधिक आधारभूत ठोसों के संयोजनों से (अर्थात् इनको मिलाकर) बनते हैं।

आपने एक ट्रक के पीछे रखे बड़े कंटेनर (container) को अवश्य ही देखा होगा (देखिए आकृति 13.2), जिसमें एक स्थान से दूसरे स्थान तक तेल या पानी ले जाया जाता है। क्या इसका आकार उपरोक्त चारों ठोसों में से किसी एक के आकार जैसा है? आप यह अनुमान लगा सकते हैं कि यह ठोस एक बेलन और उसके दोनों सिरों पर दो अर्धगोले लगने पर बना है।


आकृति 13.2



आकृति 13.3

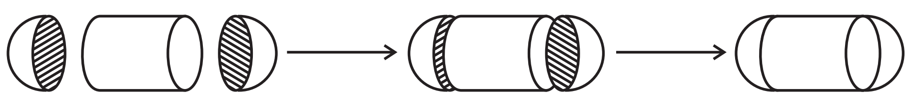
पुनः, आपने ऐसी वस्तु भी अवश्य देखी होगी जो आकृति 13.3 में दर्शाई गई है। क्या आप इसका नाम बता सकते हैं? यह निश्चय ही एक परख नली (test tube) है। आपने इसे अपनी विज्ञान प्रयोगशाला में प्रयोग किया होगा। यह परखनली भी एक बेलन और एक अर्धगोले से मिलकर बनी है। इसी प्रकार, यात्रा करते समय भी उपरोक्त ठोसों के संयोजनों से बने अनेक बड़े और सुंदर भवनों अथवा स्मारकों को आपने देखा होगा।

यदि किन्हीं कारणवश, आप इन ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल या आयतन या धारिता ज्ञात करना चाहें तो आप ऐसा किस प्रकार करेंगे? आप ऐसे ठोसों को अब तक पढ़ी हुई चारों ठोस आकृतियों में से किसी एक के रूप में वर्गीकृत नहीं कर सकते।

इस अध्याय में आप यह देखेंगे कि इस प्रकार के ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं?

13.2 ठोसों के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

आइए उस कंटेनर पर विचार करें जो हमने आकृति 13.2 में देखा था। इस प्रकार के ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल हम कैसे ज्ञात करें? अब, जब भी हमारे सम्मुख कोई नई समस्या आती है तो हम सर्वप्रथम यह देखने का प्रयत्न करते हैं कि क्या हम इसे ऐसी छोटी समस्याओं में तोड़ सकते हैं जिन्हें हम पहले हल कर चुके हैं। हम देख सकते हैं कि यह ठोस एक बेलन के दोनों सिरों पर एक-एक अर्धगोला लगाने से बना है। यह आकृति 13.4 में दिखाए ठोस जैसा लगेगा, जबकि हम सभी टुकड़ों को एक साथ मिला लेते हैं।



आकृति 13.4

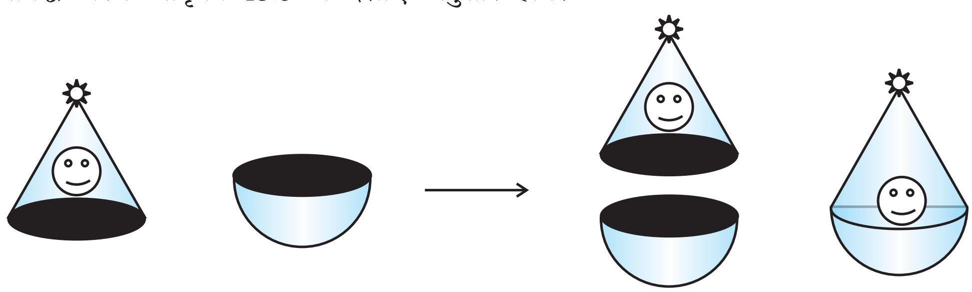
यदि हम नयी बनी हुई वस्तु को देखें, तो हमें केवल दोनों अर्धगोलों तथा बेलन के केवल वक्रपृष्ठ दिखाई देंगे।

इसलिए इस ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल तीनों भागों के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफलों के योग के बराबर होगा। इससे हमें प्राप्त होता है:

ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA) = एक अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (CSA)
+ बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
+ दूसरे अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

आइए एक अन्य स्थिति पर विचार करें। मान लीजिए हम अर्धगोले और एक शंकु को जोड़कर एक खिलौना बना रहे हैं। आइए हम उन चरणों को देखें जिनका हम अनुसरण करेंगे।

पहले हम एक शंकु और एक अर्धगोला लेंगे और फिर उनके सपाट पृष्ठों को साथ-साथ लाने का प्रयत्न करेंगे। निस्संदेह, खिलौने के पृष्ठ को चिकना रखने के लिए हम शंकु के आधार की त्रिज्या अर्धगोले की त्रिज्या के बराबर लेंगे। इस खिलौने के बनाने में संबद्ध चरण आकृति 13.5 में दर्शाए अनुसार होंगे:



आकृति 13.5

अपने प्रयत्न के फलस्वरूप हमें एक गोल आधार वाला सुंदर खिलौना प्राप्त हो जाता है। अब, हम यदि यह जानना चाहें कि इस खिलौने के पृष्ठ पर रंग करवाने के लिए कितने पेंट की आवश्यकता होगी, तो हमें क्या जानकारी होनी चाहिए? हमें इस खिलौने के पृष्ठीय क्षेत्रफल को ज्ञात करने की आवश्यकता है, जो अर्धगोले के CSA और शंकु के CSA को मिलाकर बनता है।

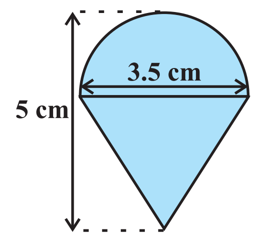
अत:, हम कह सकते हैं कि

खिलौने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = अर्धगोले का CSA + शंकु का CSA

अब, आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : रशीद को जन्मदिन के उपहार के रूप में एक लट्टू मिला, जिस पर रंग नहीं किया गया था। वह इस पर अपने मोमिया रंगों (Crayons) से रंग करना चाहता है। यह लट्टू एक शंकु के आकार का है जिसके ऊपर एक अर्धगोला अध्यारोपित है (देखिए आकृति 13.6)। लट्टू की पूरी ऊँचाई 5 cm है और इसका व्यास 3.5 cm है।

उसके द्वारा रंग किया जाने वाला क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।)



आकृति 13.6

हल : यह लट्टू बिल्कुल उस वस्तु जैसा है जिसकी चर्चा हमने आकृति 13.5 में की थी। अत:, हम वहाँ पर प्राप्त परिणाम को सुविधाजनक रूप से यहाँ प्रयोग कर सकते हैं। अर्थात्

$$\text{लट्टू का TSA} = \text{अर्धगोले का CSA} + \text{शंकु का CSA}$$

अब, अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}^2$$

साथ ही, शंकु की ऊँचाई = लट्टू की ऊँचाई – अर्धगोलीय भाग की ऊँचाई (त्रिज्या)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) \text{cm} = 3.25 \text{ cm}$$

अत: शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) $= \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2} \text{ cm} = 3.7 \text{ cm}$ (लगभग)

इसलिए शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{cm}^2$

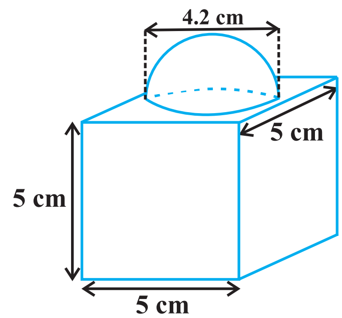
इससे लट्टू का प्राप्त पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{cm}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2}(3.5 + 3.7) \text{ cm}^2 = \frac{11}{2} \times (3.5 + 3.7) \text{ cm}^2 = 39.6 \text{ cm}^2 \text{ (लगभग)}$$

आप देख सकते हैं कि लट्टू का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल अर्धगोले और शंकु के संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफलों के योग के बराबर नहीं है।

उदाहरण 2 : आकृति 13.7 में दर्शाया गया सजावट के लिए प्रयोग होने वाला ब्लॉक दो ठोसों से मिलकर बना है। इनमें से एक घन है और दूसरा अर्धगोला है। इस ब्लॉक (block) का आधार 5 cm कोर या किनारे (edge) वाला एक घन है और उसके ऊपर लगे हुए अर्धगोले का व्यास 4.2 cm है। इस ब्लॉक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।)



आकृति 13.7

हल : घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 × (कोर)^2 = 6 × 5 × 5 cm^2 = 150 cm^2

अब, घन का वह भाग जिस पर अर्धगोला लगा हुआ है पृष्ठीय क्षेत्रफल में सम्मिलित नहीं होगा।

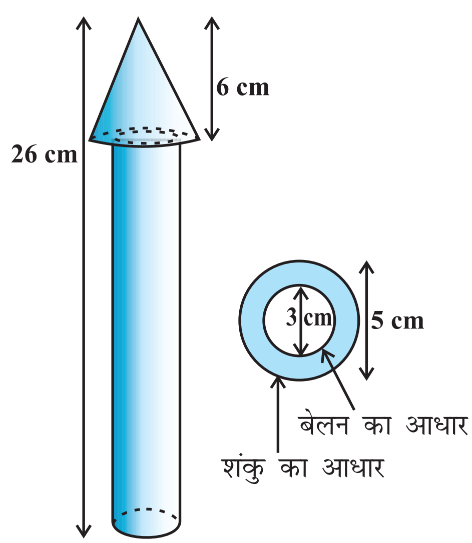
अत: ब्लॉक का पृष्ठीय क्षेत्रफल = घन का TSA – अर्धगोले के आधार का क्षेत्रफल + अर्धगोले का CSA

$$= 150 - \pi r^2 + 2\,\pi r^2 = (150 + \pi r^2)\text{ cm}^2$$

$$= 150\text{ cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2}\right)\text{cm}^2$$

$$= 150\text{ cm}^2 + 13.86\text{ cm}^2 = 163.86\text{ cm}^2$$

उदाहरण 3 : लकड़ी का एक खिलौना रॉकेट (rocket) एक शंकु के आकार का है जो एक बेलन पर अध्यारोपित है, जैसाकि आकृति 13.8 में दर्शाया गया है। संपूर्ण रॉकेट की ऊँचाई 26 cm है, जबकि शंक्वाकार भाग की ऊँचाई 6 cm है। शंक्वाकार के भाग के आधार का व्यास 5 cm और बेलनाकार भाग के आधार का व्यास 3 cm है। यदि शंक्वाकार भाग पर नारंगी रंग किया जाना है और बेलनाकार भाग पर पीला रंग किया जाना है, तो प्रत्येक रंग द्वारा रॉकेट का रँगे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 लीजिए।)



आकृति 13.8

हल : शंकु की त्रिज्या को r से, शंकु की तिर्यक ऊँचाई को l से, शंकु की ऊँचाई को h से, बेलन की त्रिज्या को r' से, बेलन की ऊँचाई को h' से व्यक्त कीजिए। तब, $r = 2.5$ cm, $h = 6$ cm, $r' = 1.5$ cm, $h' = 26 - 6 = 20$ cm तथा

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} \text{ cm} = 6.5 \text{ cm}$$

यहाँ, शंक्वाकार भाग का वृत्तीय आधार बेलन के आधार पर टिका हुआ है परंतु शंकु का आधार बेलन के आधार से बड़ा है। अत:, शंकु के आधार के एक भाग [वलय (ring)] को भी रँगा जाएगा।

अत:, नारंगी रंग से रँगे भाग का क्षेत्रफल = शंकु का CSA + शंकु के आधार का क्षेत्रफल – बेलन के आधार का क्षेत्रफल

$$= \pi rl + \pi r^2 - \pi(r')^2$$

$$= \pi[(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2] \text{ cm}^2$$

$$= \pi[20.25] \text{ cm}^2 = 3.14 \times 20.25 \text{ cm}^2$$

$$= 63.585 \text{ cm}^2$$

अब, पीले रंग से रंगे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल = बेलन का CSA + बेलन के एक आधार का क्षेत्रफल

$$= 2\pi r'h' + \pi(r')^2$$

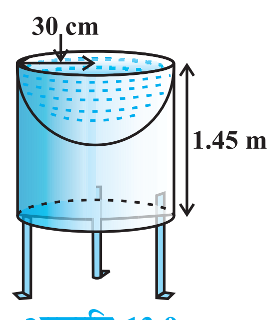
$$= \pi r' (2h' + r')$$

$$= 3.14 \times 1.5 [2 \times 20 + 1.5] \text{ cm}^2$$

$$= 4.71 \times 41.5 \text{ cm}^2$$

$$= 195.465 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 4 : मयंक ने अपने बगीचे के लिए एक पक्षी-स्नानागार (bird-bath) बनाया जिसका आकार एक खोखले बेलन जैसा है जिसके एक सिरे पर अर्धगोलाकार बर्तन बना हुआ है (देखिए आकृति 13.9)। बेलन की ऊँचाई 1.45 m है और उसकी त्रिज्या 30 cm है। इस पक्षी-स्नानागार का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.9

हल : मान लीजिए कि बेलन की ऊँचाई h है तथा बेलन और अर्धगोले की उभयनिष्ठ त्रिज्या r है। तब,

पक्षी-स्नानागार का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का CSA + अर्धगोले का CSA

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30(145 + 30) \text{ cm}^2$$

$$= 33000 \text{ cm}^2 = 3.3 \text{ m}^2$$

प्रश्नावली 13.1

जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।

1. दो घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन 64 cm^3 है, के संलग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

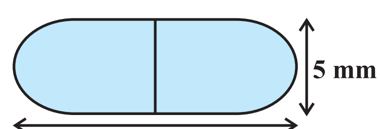
2. कोई बर्तन एक खोखले अर्धगोले के आकार का है जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अध्यारोपित है। अर्धगोले का व्यास 14 cm है और इस बर्तन (पात्र) की कुल ऊँचाई 13 cm है। इस बर्तन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. एक खिलौना त्रिज्या 3.5 cm वाले एक शंकु के आकार का है, जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की संपूर्ण ऊँचाई 15.5 cm है। इस खिलौने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. भुजा 7 cm वाले एक घनाकार ब्लॉक के ऊपर एक अर्धगोला रखा हुआ है। अर्धगोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है? इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. एक घनाकार ब्लॉक के एक फलक को अंदर की ओर से काट कर एक अर्धगोलाकार गड्ढा इस प्रकार बनाया गया है कि अर्धगोले का व्यास घन के एक किनारे के बराबर है। शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. दवा का एक कैप्सूल (capsule) एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक-एक अर्धगोला लगा हुआ है (देखिए आकृति 13.10)। पूरे कैप्सूल की लंबाई 14 mm है और उसका व्यास 5 mm है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

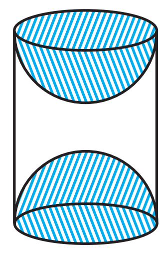


आकृति 13.10

7. कोई तंबू एक बेलन के आकार का है जिस पर एक शंकु अध्यारोपित है। यदि बेलनाकार भाग की ऊँचाई और व्यास क्रमशः 2.1 m और 4 m है तथा शंकु की तिर्यक ऊँचाई 2.8 m है तो इस तंबू को बनाने में प्रयुक्त कैनवस (canvas) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही, ₹ 500 प्रति m^2 की दर से इसमें प्रयुक्त कैनवस की लागत ज्ञात कीजिए। (ध्यान दीजिए कि तंबू के आधार को कैनवस से नहीं ढका जाता है।)

8. ऊँचाई 2.4 cm और व्यास 1.4 cm वाले एक ठोस बेलन में से इसी ऊँचाई और इसी व्यास वाला एक शंक्वाकार खोल (cavity) काट लिया जाता है। शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेंटीमीटर तक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. लकड़ी के एक ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्धगोला खोदकर निकालते हुए, एक वस्तु बनाई गई है, जैसाकि आकृति 13.11 में दर्शाया गया है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 3.5 cm है तो इस वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

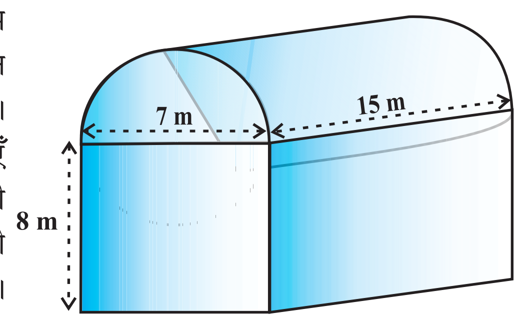


आकृति 13.11

13.3 ठोसों के संयोजन का आयतन

पिछले अनुच्छेद में हमने यह चर्चा की है कि दो आधारभूत ठोसों के संयोजन से बने ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। अब हम देखेंगे कि इस प्रकार के ठोसों के आयतन किस प्रकार परिकलित किए जाते हैं। ध्यान दीजिए कि पृष्ठीय क्षेत्रफल परिकलित करने में हमने दोनों घटकों (ठोसों) के पृष्ठीय क्षेत्रफलों को जोड़ा नहीं था क्योंकि इनको मिलाने की प्रक्रिया में पृष्ठीय क्षेत्रफल का कुछ भाग लुप्त हो गया था। परंतु आयतन परिकलित करने की स्थिति में ऐसा नहीं होगा। दो आधारभूत ठोसों के संयोजन से बने ठोस का आयतन वास्तव में दोनों घटकों के आयतनों के योग के बराबर होता है, जैसाकि हम नीचे दिए उदाहरण में देखेंगे।

उदाहरण 5 : शांता किसी शेड (shed) में एक उद्योग चलाती है। यह शेड एक घनाभ के आकार का है जिस पर एक अर्धबेलन आरोपित है (देखिए आकृति 13.12)। यदि इस शेड के आधार की विमाएँ 7 m × 15 m हैं तथा घनाभाकार भाग की ऊँचाई 8 m है तो शेड में समावेशित हो सकने वाली हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। पुन: यदि यह मान लें कि शेड में रखी मशीनरी 300 m^3 स्थान घेरती है तथा शेड के अंदर 20 श्रमिक हैं जिनमें से प्रत्येक 0.08 m^3 के औसत से स्थान घेरता है तब शेड में कितनी हवा होगी? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।)



आकृति 13.12

हल : शेड के अंदर हवा का आयतन (जब इसमें कोई व्यक्ति या मशीनरी नहीं है) घनाभ के अंदर की हवा और अर्धबेलन के अंदर की हवा के आयतनों को मिला कर प्राप्त होगा।

अब, घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 15 m, 7 m और 8 m हैं।

साथ ही, अर्धबेलन का व्यास 7 m और ऊँचाई 15 m है।

इसलिए वांछित आयतन = घनाभ का आयतन + $\frac{1}{2}$ बेलन का आयतन

$$= \left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15\right] \text{m}^3 = 1128.75 \text{ m}^3$$

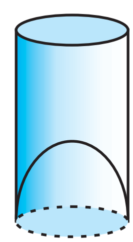
आगे, मशीनरी द्वारा घेरा गया स्थान = 300 m^3

तथा 20 श्रमिकों द्वारा घेरा गया स्थान = 20 × 0.08 m^3 = 1.6 m^3

अतः, शेड में उस समय हवा का आयतन, जब उसमें मशीनरी और श्रमिक हैं

$$= 13128.75 - (300.00 + 1.60) = 827.15 \text{ m}^3$$

उदाहरण 6 : एक जूस (juice) बेचने वाला अपने ग्राहकों को आकृति 13.13 में दर्शाए गिलासों से जूस देता था। बेलनाकार गिलास का आंतरिक व्यास 5 cm था, परंतु गिलास के निचले आधार (तली) में एक उभरा हुआ अर्धगोला था, जिससे गिलास की धारिता कम हो जाती थी। यदि एक गिलास की ऊँचाई 10 cm थी, तो गिलास की आभासी (apparent) धारिता तथा उसकी वास्तविक धारिता ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 लीजिए।)



आकृति 13.13

हल : चूँकि गिलास का आंतरिक व्यास = 5 cm है और ऊँचाई = 10 cm है, इसलिए

गिलास की आभासी धारिता = $\pi r^2 h$

$$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10 \text{ cm}^3 = 196.25 \text{ cm}^3$$

परंतु इसकी वास्तविक धारिता उपरोक्त धारिता से आधार में बने अर्धगोले के आयतन के बराबर कम है।

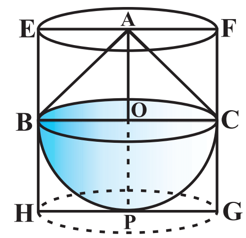
अर्थात् कमी बराबर है $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5 \text{ cm}^3 = 32.71 \text{ cm}^3$

अतः गिलास की वास्तविक धारिता = आभासी धारिता – अर्धगोले का आयतन

$$= (196.25 - 32.71) \text{ cm}^3$$

$$= 163.54 \text{ cm}^3$$

उदाहरण 7 : एक ठोस खिलौना एक अर्धगोले के आकार का है जिस पर एक लंब वृत्तीय शंकु आरोपित है। इस शंकु की ऊँचाई 2 cm है और आधार का व्यास 4 cm है। इस खिलौने का आयतन निर्धारित कीजिए। यदि एक लंब वृत्तीय बेलन इस खिलौने के परिगत हो तो बेलन और खिलौने के आयतनों का अंतर ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 लीजिए।)



आकृति 13.14

हल : मान लीजिए BPC अर्धगोला है तथा ABC अर्धगोले के आधार पर खड़ा एक शंकु है (देखिए आकृति 13.14)। अर्धगोले (और शंकु की भी) की त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times 4$ cm = 2 cm

इसलिए खिलौने का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \left[\frac{2}{3} \times 3.14 \times (2)^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times (2)^2 \times 2\right] \text{cm}^3 = 25.12 \text{ cm}^3$$

अब, मान लीजिए कि दिए गए ठोस के परिगत लंब वृत्तीय बेलन EFGH है। इस लंब वृत्तीय बेलन के आधार की त्रिज्या = HP = BO = 2 cm है तथा इसकी ऊँचाई

$$\text{EH} = \text{AO} + \text{OP} = (2 + 2) \text{ cm} = 4 \text{ cm है।}$$

अतः, वांछित आयतन = लंब वृत्तीय बेलन का आयतन – खिलौने का आयतन

$$= (3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12) \text{ cm}^3$$

$$= 25.12 \text{ cm}^3$$

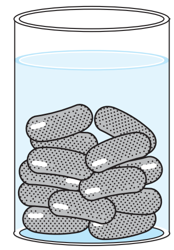
इस प्रकार, दोनों आयतनों का अंतर = 25.12 cm^3 है।

प्रश्नावली 13.2

(जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।)

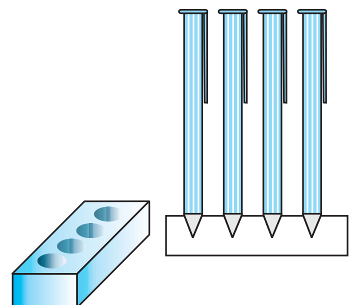
1. एक ठोस एक अर्धगोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है जिनकी त्रिज्याएँ 1 cm हैं तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस ठोस का आयतन π के पदों में ज्ञात कीजिए।
2. एक इंजीनियरिंग के विद्यार्थी रचेल से एक पतली एल्यूमीनियम की शीट का प्रयोग करते हुए एक मॉडल बनाने को कहा गया जो एक ऐसे बेलन के आकार का हो जिसके दोनों सिरों पर दो शंकु जुड़े हुए हों। इस मॉडल का व्यास 3 cm है और इसकी लंबाई 12 cm है। यदि प्रत्येक शंकु की ऊँचाई 2 cm हो तो रचेल द्वारा बनाए गए मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। (यह मान लीजिए कि मॉडल की आंतरिक और बाहरी विमाएँ लगभग बराबर हैं।)

3. एक गुलाबजामुन में उसके आयतन की लगभग 30% चीनी की चाशनी होती है। 45 गुलाबजामुनों में लगभग कितनी चाशनी होगी, यदि प्रत्येक गुलाबजामुन एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरे अर्धगोलाकार हैं तथा इसकी लंबाई 5 cm और व्यास 2.8 cm है (देखिए आकृति 13.15)।



आकृति 13.15

4. एक कलमदान घनाभ के आकार की एक लकड़ी से बना है जिसमें कलम रखने के लिए चार शंक्वाकार गड्ढे बने हुए हैं। घनाभ की विमाएँ 15 cm × 10 cm × 3.5 cm हैं। प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5 cm है और गहराई 1.4 cm है। पूरे कलमदान में लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति 13.16)।



आकृति 13.16

5. एक बर्तन एक उल्टे शंकु के आकार का है। इसकी ऊँचाई 8 cm है और इसके ऊपरी सिरे (जो खुला हुआ है) की त्रिज्या 5 cm है। यह ऊपर तक पानी से भरा हुआ है। जब इस बर्तन में सीसे की कुछ गोलियाँ जिनमें प्रत्येक 0.5 cm त्रिज्या वाला एक गोला है, डाली जाती हैं, तो इसमें से भरे हुए पानी का एक चौथाई भाग बाहर निकल जाता है। बर्तन में डाली गई सीसे की गोलियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

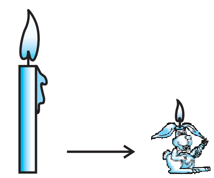
6. ऊँचाई 220 cm और आधार व्यास 24 cm वाले एक बेलन, जिस पर ऊँचाई 60 cm और त्रिज्या 8 cm वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लोहे का एक स्तंभ बना है। इस स्तंभ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है 1 cm^3 लोहे का द्रव्यमान लगभग 8 g होता है। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

7. एक ठोस में, ऊँचाई 120 cm और त्रिज्या 60 cm वाला एक शंकु सम्मिलित है, जो 60 cm त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर आरोपित है। इस ठोस को पानी से भरे हुए एक लंब वृत्तीय बेलन में इस प्रकार सीधा डाल दिया जाता है कि यह बेलन की तली को स्पर्श करे। यदि बेलन की त्रिज्या 60 cm है और ऊँचाई 180 cm है तो बेलन में शेष बचे पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

8. एक गोलाकार काँच के बर्तन की एक बेलन के आकार की गर्दन है जिसकी लंबाई 8 cm है और व्यास 2 cm है जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5 cm है। इसमें भरे जा सकने वाली पानी की मात्रा माप कर, एक बच्चे ने यह ज्ञात किया कि इस बर्तन का आयतन 345 cm^3 है। जाँच कीजिए कि उस बच्चे का उत्तर सही है या नहीं, यह मानते हुए कि उपरोक्त मापन आंतरिक मापन है और $\pi = 3.14$ ।

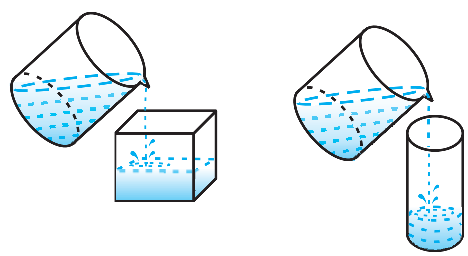
13.4 एक ठोस का एक आकार से दूसरे आकार में रूपांतरण

निश्चित रूप से, आपने मोमबत्तियाँ अवश्य देखी होंगी। सामान्यत: ये बेलन के आकार की होती हैं। आपने पशुओं के आकार की भी कुछ मोमबत्तियाँ देखी होंगी (देखिए आकृति 13.17)।



आकृति 13.17

ये किस प्रकार बनाई जाती हैं? यदि आप किसी विशिष्ट प्रकार की मोमबत्ती बनाना चाहते हैं, तो आपको एक धातु के बर्तन (पात्र) में मोम को तब तक गर्म करना पड़ेगा जब तक वह पूर्णतया द्रव में न बदल जाए। फिर आप इसे एक अन्य ऐसे बर्तन या पात्र में (साँचे में) डालेंगे जिसका आकार वही होगा जिस आकार की आप मोमबत्ती बनाना चाहते हैं। उदाहरणार्थ, एक ठोस बेलन के आकार की मोमबत्ती लीजिए, इसे पिघलाइए तथा पिघली हुई पूरी मोम को खरगोश के आकार वाले एक साँचे में डाल दीजिए। ठंडा करने पर आपको खरगोश के आकार की मोमबत्ती प्राप्त हो जाएगी। नयी मोमबत्ती का आयतन वही होगा जो पहली मोमबत्ती का था। यही बात हमें तब भी याद रखनी चाहिए, जब हम एक ठोस को अन्य आकार के एक दूसरे ठोस में परिवर्तित होते हुए देखते हैं अथवा जब कोई द्रव पदार्थ एक आकार के बर्तन से एक अन्य आकार के बर्तन में डाला जाता है, जैसा आप आकृति 13.18 में देखते हैं।



आकृति 13.18

उपरोक्त चर्चा को समझने के लिए, आइए हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 8 : मॉडल बनाने वाली मिट्टी से ऊँचाई 24 cm और आधार त्रिज्या 6 cm वाला एक शंकु बनाया गया है। एक बच्चे ने इसे गोले के आकार में बदल दिया। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24 \text{ cm}^3$

यदि गोले की त्रिज्या r है तो उसका आयतन $\frac{4}{3}\pi r^3$ है।

चूँकि शंकु के रूप में और गोले के रूप में मिट्टी के आयतन बराबर हैं, इसलिए

$$\frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$$

अर्थात् $r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3^3 \times 2^3$

अत: $r = 3 \times 2 = 6$

इसलिए, गोले की त्रिज्या 6 cm है।

उदाहरण 9 : सेल्वी के घर की छत पर बेलन के आकार की एक टंकी है। इस टंकी में एक भूमिगत टंकी में भरे पानी को पंप द्वारा पहुँचा कर टंकी को भरा जाता है। यह भूमिगत टंकी एक घनाभ के आकार की है, जिसकी विमाएँ 1.57 m × 1.44 m × 95cm हैं। छत की टंकी की त्रिज्या 60 cm है और ऊँचाई 95 cm है। यदि भूमिगत टंकी पानी से पूरी भरी हुई थी, तो उससे छत की टंकी को पूरा भरने के बाद भूमिगत टंकी में पानी कितनी ऊँचाई तक रह जाएगा? छत की टंकी की धारिता की भूमिगत टंकी की धारिता से तुलना कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

हल : छत की टंकी का आयतन = भूमिगत टंकी से निकाले गए पानी का आयतन

अब, छत की टंकी (बेलन) का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= 3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \text{ m}^3$$

भूमिगत टंकी के पानी से पूरी भरी होने पर पानी का आयतन

$= l \times b \times h = 1.57 \times 1.44 \times 0.95 \text{ m}^3$

छत की टंकी को पानी से पूरा भरने के बाद भूमिगत टंकी में शेष बचे पानी का आयतन

$= [(1.57 \times 1.44 \times 0.95) - (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)] \text{ m}^3 = (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2) \text{ m}^3$

इसलिए, भूमिगत टंकी में शेष बचे पानी की ऊँचाई = $\dfrac{\text{उसमें बचे पानी का आयतन}}{l \times b}$

$$= \frac{1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2}{1.57 \times 1.44} \text{ m}$$

$$= 0.475 \text{ m} = 47.5 \text{ cm}$$

साथ ही, $\dfrac{\text{छत की टंकी की धारिता}}{\text{भूमिगत टंकी की धारिता}} = \dfrac{3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95}{1.57 \times 1.44 \times 0.95} = \dfrac{1}{2}$

अत:, छत की टंकी की धारिता भूमिगत टंकी की धारिता की आधी है।

उदाहरण 10 : व्यास 1 cm वाली 8 cm लंबी ताँबे की एक छड़ को एकसमान चौड़ाई वाले 18 m लंबे एक तार के रूप में खींचा जाता (बदला जाता) है। तार की मोटाई ज्ञात कीजिए।

हल : छड़ का आयतन = $\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8 \text{ cm}^3 = 2\pi \text{ cm}^3$

समान आयतन वाले तार की लंबाई = 18 m = 1800 cm

यदि तार के अनुप्रस्थ काट (cross-section) की त्रिज्या r है, तो तार का आयतन $= \pi \times r^2 \times 1800 \text{ cm}^3$

अत: $\pi \times r^2 \times 1800 = 2\pi$

अर्थात् $r^2 = \frac{1}{900}$

अर्थात् $r = \frac{1}{30}$ cm

अत:, तार के अनुप्रस्थ काट का व्यास, तार की चौड़ाई $\frac{1}{15}$ cm, अर्थात् 0.67mm (लगभग) है।

उदाहरण 11 : पानी से पूरी भरी हुई एक अर्धगोलाकार टंकी को एक पाइप द्वारा $3\frac{4}{7}$ लीटर प्रति सेकंड की दर से खाली किया जाता है। यदि टंकी का व्यास 3m है, तो वह कितने समय में आधी खाली हो जाएगी? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।)

हल : अर्धगोलाकार टंकी की त्रिज्या = $\frac{3}{2}$ m

अत:, टंकी का आयतन = $\frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \text{ m}^3 = \frac{99}{14} \text{m}^3$

उस पानी का आयतन, जिसे खाली किया जाना है

$$= \frac{1}{2} \times \frac{99}{14} \text{ m}^3$$

$$= \frac{99}{28} \times 1000 = \frac{99000}{28} \text{ लीटर}$$

अब, $\frac{25}{7}$ लीटर पानी खाली होता है 1 सेकंड में, इसलिए $\frac{99000}{28}$ लीटर पानी खाली होगा $\frac{99000}{28} \times \frac{7}{25}$ सेकंड में, अर्थात् 16.5 मिनट में।

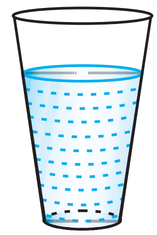
प्रश्नावली 13.3

(जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।)

1. त्रिज्या 4.2 cm वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6 cm वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
2. क्रमश: 6 cm, 8 cm और 10 cm त्रिज्याओं वाले धातु के तीन ठोस गोलों को पिघलाकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है। इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
3. व्यास 7 m वाला 20 m गहरा एक कुआँ खोदा जाता है और खोदने से निकली हुई मिट्टी को समान रूप से फैलाकर 22 m × 14 m वाला एक चबूतरा बनाया गया है। इस चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
4. व्यास 3 m का एक कुआँ 14 m की गहराई तक खोदा जाता है। इससे निकली हुई मिट्टी को कुएँ के चारों ओर 4 m चौड़ी एक वृत्ताकार वलय (ring) बनाते हुए, समान रूप से फैलाकर एक प्रकार का बाँध बनाया जाता है। इस बाँध की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
5. व्यास 12 cm और ऊँचाई 15 cm वाले एक लंब वृत्तीय बेलन के आकार का बर्तन आइसक्रीम से पूरा भरा हुआ है। इस आइसक्रीम को ऊँचाई 12 cm और व्यास 6 cm वाले शंकुओं में भरा जाना है, जिनका ऊपरी सिरा अर्धगोलाकार होगा। उन शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो इस आइसक्रीम से भरे जा सकते हैं।
6. विमाओं 5.5 cm × 10 cm × 3.5 cm वाला एक घनाभ बनाने के लिए, 1.75 cm व्यास और 2 mm मोटाई वाले कितने चाँदी के सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा?
7. 32 cm ऊँची और आधार त्रिज्या 18 cm वाली एक बेलनाकार बाल्टी रेत से भरी हुई है। इस बाल्टी को भूमि पर खाली किया जाता है और इस रेत की एक शंक्वाकार ढेरी बनाई जाती है। यदि शंक्वाकार ढेरी की ऊँचाई 24 cm है, तो इस ढेरी की त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
8. 6 m चौड़ी और 1.5 m गहरी एक नहर में पानी 10 km/h की चाल से बह रहा है। 30 मिनट में, यह नहर कितने क्षेत्रफल की सिंचाई कर पाएगी, जबकि सिंचाई के लिए 8 cm गहरे पानी की आवश्यकता होती है।
9. एक किसान अपने खेत में बनी 10 m व्यास वाली और 2 m गहरी एक बेलनाकार टंकी को आंतरिक व्यास 20 cm वाले एक पाइप द्वारा एक नहर से जोड़ता है। यदि पाइप में पानी 3 km/h की चाल से बह रहा है, तो कितने समय बाद टंकी पूरी भर जाएगी?

13.5 शंकु का छिन्नक (Frustum)

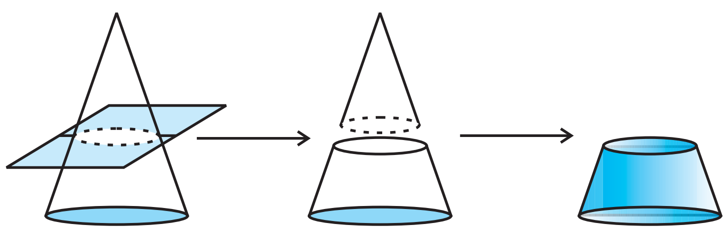
अनुच्छेद 13.2 में, हमने उन वस्तुओं को देखा जो दो आधारभूत ठोसों को मिलाने से बनते हैं। आइए अब इससे कुछ भिन्न करें। हम एक लंब वृत्तीय शंकु लेंगे और इसका एक भाग हटा देंगे। ऐसा करने की अनेक विधियाँ हैं। परंतु जिस विधि में हमारी रुचि है वह यह है कि हम इस शंकु के आधार के समांतर एक तल द्वारा इसे काटकर एक छोटा लंब वृत्तीय शंकु अलग करें। आपने इस पर अवश्य ही ध्यान दिया होगा कि पानी पीने के लिए प्रयोग किए जाने वाले गिलास, सामान्यत: इसी आकार के होते हैं (देखिए आकृति 13.19)।



आकृति 13.19

क्रियाकलाप 1 : कुछ मिट्टी या ऐसा ही कोई पदार्थ (जैसे प्लास्टिक, क्ले इत्यादि) लीजिए और एक शंकु बनाइए। इसे चाकू की सहायता से आधार के समांतर काटिए। छोटे शंकु को हटा दीजिए। आपके पास क्या बचता है? आपके पास एक ठोस बचता है, जिसे *शंकु का छिन्नक (frustum of a cone)* कहते हैं।

आप देख सकते हैं कि इसके विभिन्न त्रिज्याओं वाले दो वृत्ताकार सिरे हैं। अत:, जब हम एक दिए हुए शंकु को उसके आधार के समांतर किसी तल द्वारा काटते हैं (देखिए आकृति 13.20) और इस तल के एक ओर बने शंकु को हटा देते हैं, तो तल के दूसरी ओर बचे शंकु के भाग को **शंकु का छिन्नक (frustum)*** कहते हैं

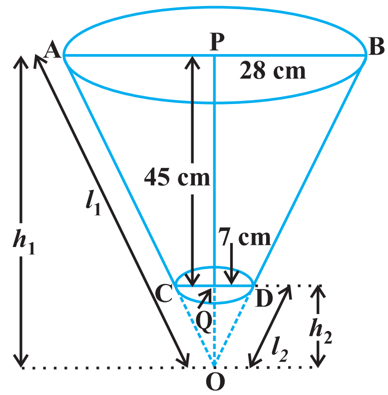


आकृति 13.20

हम शंकु के छिन्नक के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन किस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं? आइए इसे एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करें।

* 'Frustum' एक लैटिन शब्द है, जिसका अर्थ है 'काटा हुआ टुकड़ा' और इसका बहुवचन है 'Frusta'

उदाहरण 12 : एक शंकु के छिन्नक, जो 45 cm ऊँचा है, के सिरों की त्रिज्याएँ 28 cm और 7 cm हैं। इसका आयतन, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल और संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)



आकृति 13.21

हल : इस छिन्नक को दो लंब वृत्तीय शंकुओं OAB और OCD के अंतर के रूप में देखा जा सकता है (देखिए आकृति 13.21)। मान लीजिए सेंटीमीटर में शंकु OAB की ऊँचाई h_1 है और तिर्यक ऊँचाई l_1 है, अर्थात् OP = h_1 और OA = OB = l_1 है। मान लीजिए शंकु OCD की सेंटीमीटर में ऊँचाई h_2 और तिर्यक ऊँचाई l_2 है।

हमें r_1 = 28 cm, r_2 = 7 cm और छिन्नक की ऊँचाई (h) = 45 cm दिए हुए हैं।

साथ ही
$$h_1 = 45 + h_2 \quad (1)$$

सबसे पहले हमें क्रमशः शंकुओं OAB और OCD की ऊँचाइयों h_1 और h_2 को निर्धारित करना आवश्यक है।

चूँकि त्रिभुज OPB और OQD समरूप हैं (क्यों?), इसलिए हमें प्राप्त है :

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{28}{7} = \frac{4}{1} \quad (2)$$

(1) और (2) से हमें $h_2 = 15$ और $h_1 = 60$ प्राप्त होता है

अब, छिन्नक का आयतन

= शंकु OAB का आयतन – शंकु OCD का आयतन

$$= \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(28)^2\cdot(60) - \frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(7)^2\cdot(15)\right]\text{cm}^3 = 48510\ \text{cm}^3$$

शंकु OAB तथा शंकु OCD की तिर्यक ऊँचाइयाँ क्रमशः l_1 और l_2 नीचे दर्शाए अनुसार प्राप्त होती हैं :

$$l_2 = \sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 16.55\ \text{cm (लगभग)}$$

$$l_1 = \sqrt{(28)^2 + (60)^2} = 4\sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 4 \times 16.55 = 66.20\ \text{cm}$$

इस प्रकार छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$

$$= \frac{22}{7}(28)(66.20) - \frac{22}{7}(7)(16.55) = 5461.5 \text{ cm}^2$$

अब, छिन्नक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= $ वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $+ \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$$= 5461.5 \text{ cm}^2 + \frac{22}{7}(28)^2 \text{ cm}^2 + \frac{22}{7}(7)^2 \text{ cm}^2$$

$$= 5461.5 \text{ cm}^2 + 2464 \text{ cm}^2 + 154 \text{ cm}^2 = 8079.5 \text{ cm}^2$$

मान लीजिए किसी शंकु के छिन्नक की ऊँचाई h है, तिर्यक ऊँचाई l है तथा सिरों की त्रिज्याएँ r_1 और r_2 $(r_1 > r_2)$ हैं, तो हम इसके आयतन, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल और संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल निम्नलिखित सूत्रों का सीधा प्रयोग करते हुए ज्ञात कर सकते हैं :

(i) *शंकु के छिन्नक का आयतन* $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

(ii) *शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल* $= \pi(r_1 + r_2)\, l$

जहाँ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$.

(iii) *शंकु के छिन्नक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल* $= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$,

जहाँ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

इन सूत्रों को त्रिभुजों की समरूपता की अवधारणा का प्रयोग करके सिद्ध किया जा सकता है, परंतु हम यहाँ इन्हें सिद्ध नहीं करेंगे।

आइए इन सूत्रों का प्रयोग करके उदाहरण 12 को हल करें।

(i) छिन्नक का आयतन $= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot 45 \cdot \left[(28)^2 + (7)^2 + (28)(7)\right] \text{cm}^3$$

$$= 48510 \text{ cm}^3$$

(ii) हमें प्राप्त है $\quad l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{(45)^2 + (28-7)^2}$ cm

$$= 3\sqrt{(15)^2 + (7)^2} = 49.65 \text{ cm}$$

अत:, छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi(r_1 + r_2)\, l = \frac{22}{7}(28 + 7)(49.65) = 5461.5 \text{ cm}^2$$

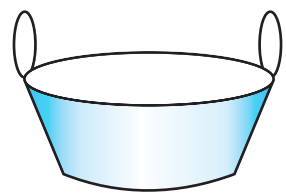
(iii) छिन्नक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$= \left[5461.5 + \frac{22}{7}(28)^2 + \frac{22}{7}(7)^2\right] \text{cm}^2 = 8079.5 \text{ cm}^2$$

आइए इन सूत्रों का कुछ उदाहरणों में प्रयोग करें।

उदाहरण 13 : हनुमप्पा और उसकी पत्नी गंगाम्मा गन्ने के रस से गुड़ बना रहे हैं। उन्होंने गन्ने के रस को गर्म करके राब (शीरा) बना ली है, जिसे शंकु के छिन्नक के आकार के साँचों में डाला जाता है, जिनमें से प्रत्येक के दोनों वृत्तीय फलकों के व्यास क्रमश: 30 cm और 35 cm हैं तथा साँचे की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 14 cm है (देखिए आकृति 13.22)। यदि 1 cm³ राब का द्रव्यमान लगभग 1.2 g है तो प्रत्येक साँचे में भरी जा सकने वाली राब का द्रव्यमान ज्ञात करें। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right.$ लीजिए$\left.\right)$



आकृति 13.22

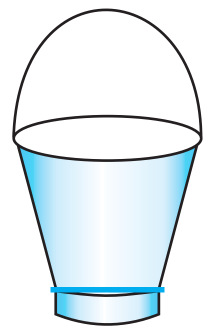
हल : चूँकि साँचा एक शंकु के छिन्नक के आकार का है, इसलिए इसमें भरी जा सकने वाली राब का आयतन $= \frac{\pi}{3}h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$,

जहाँ r_1 बड़े आधार की त्रिज्या है और r_2 छोटे आधार की त्रिज्या है।

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 + \left(\frac{35}{2} \times \frac{30}{2}\right)\right]\text{cm}^3 = 11641.7 \text{ cm}^3$$

यह दिया है कि 1 cm³ राब का द्रव्यमान 1.2g है। अत: प्रत्येक साँचे में भरी जा सकने वाली राब का भार द्रव्यमान = (11641.7 × 1.2) g

$$= 13970.04\text{g} = 13.97 \text{ kg} = 14 \text{ kg (लगभग)}$$



आकृति 13.23

उदाहरण 14 : धातु से बनी एक खुली बाल्टी शंकु के एक छिन्नक के आकार की है, जो उसी धातु के बने एक खोखले बेलनाकार आधार पर आरोपित है (देखिए आकृति 13.23)। इस बाल्टी के दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 45 cm और 25 cm हैं तथा बाल्टी की कुल ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 40 cm और बेलनाकार आधार की ऊँचाई 6 cm है। इस बाल्टी को बनाने में प्रयुक्त धातु की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि हम बाल्टी की मुठिया (या हत्थे) को इसमें सम्मिलित नहीं कर रहे हैं। साथ ही, उस पानी का आयतन ज्ञात कीजिए जो इस बाल्टी में धारण कर सकता है। $\left(\pi = \frac{22}{7} \text{ लीजिए}\right)$

हल : बाल्टी की कुल ऊँचाई = 40 cm है, जिसमें आधार की ऊँचाई भी सम्मिलित है। इसलिए शंकु के छिन्नक की ऊँचाई (40 – 6) cm = 34 cm है।

अत:, शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

जहाँ r_1 = 22.5 cm, r_2 = 12.5 cm और h = 34 cm

अत:
$$l = \sqrt{34^2 + (22.5 - 12.5)^2} \text{ cm}$$
$$= \sqrt{34^2 + 10^2} = 35.44 \text{ cm}$$

इसमें प्रयुक्त धातु की चादर का क्षेत्रफल = शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
+ वृत्तीय आधार का क्षेत्रफल
+ बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= [\pi \times 35.44\,(22.5 + 12.5) + \pi \times (12.5)^2 + 2\pi \times 12.5 \times 6] \text{ cm}^2$$

$$= \frac{22}{7}[1240.4 + 156.25 + 150] \text{ cm}^2$$

$$= 4860.9 \text{ cm}^2$$

अब, बाल्टी में आ सकने वाले पानी का आयतन, जिसे बाल्टी की धारिता भी कहते हैं

$$= \frac{\pi \times h}{3} \times (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

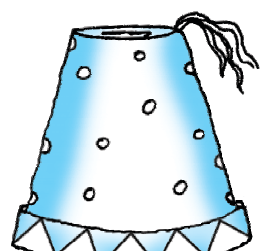
$$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times [(22.5)^2 + (12.5)^2 + 22.5 \times 12.5] \text{ cm}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times 943.75 = 33615.48 \text{ cm}^3$$

= 33.62 लीटर (लगभग)

प्रश्नावली 13.4

(जब तक अन्यथा न कहा जाए, $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।)



आकृति 13.24

1. पानी पीने वाला एक गिलास 14 cm ऊँचाई वाले एक शंकु के छिन्नक के आकार का है। दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 4 cm और 2 cm हैं। इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए।
2. एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई 4 cm है तथा इसके वृत्तीय सिरों के परिमाप (परिधियाँ) 18 cm और 6 cm हैं। इस छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक तुर्की टोपी शंकु के एक छिन्नक के आकार की है (देखिए आकृति 13.24)। यदि इसके खुले सिरे की त्रिज्या 10 cm है, ऊपरी सिरे की त्रिज्या 4 cm है और टोपी की तिर्यक ऊँचाई 15 cm है, तो इसके बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. धातु की चादर से बना और ऊपर से खुला एक बर्तन शंकु के एक छिन्नक के आकार का है, जिसकी ऊँचाई 16 cm है तथा निचले और ऊपरी सिरों की त्रिज्याएँ क्रमश: 8 cm और 20 cm हैं। ₹ 20 प्रति लीटर की दर से, इस बर्तन को पूरा भर सकने वाले दूध का मूल्य ज्ञात कीजिए। साथ ही, इस बर्तन को बनाने के लिए प्रयुक्त धातु की चादर का मूल्य ₹ 8 प्रति 100 cm^2 की दर से ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)
5. 20 cm ऊँचाई और शीर्ष कोण (vertical angle) 60° वाले एक शंकु को उसकी ऊँचाई के बीचोबीच से होकर जाते हुए एक तल से दो भागों में काटा गया है, जबकि तल शंकु के आधार के समांतर है। यदि इस प्राप्त शंकु के छिन्नक को व्यास $\frac{1}{16}$ cm वाले एक तार के रूप में बदल दिया जाता है तो तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 13.5 (ऐच्छिक)*

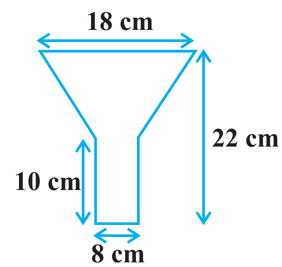
1. व्यास 3 mm वाले ताँबे के एक तार को 12 cm लंबे और 10 cm व्यास वाले एक बेलन पर इस प्रकार लपेटा जाता है कि वह बेलन के वक्र पृष्ठ को पूर्णतया ढक लेता है। तार की लंबाई और द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, यह मानते हुए कि ताँबे का घनत्व 8.88 g प्रति cm^3 है।

2. एक समकोण त्रिभुज, जिसकी भुजाएँ 3 cm और 4 cm हैं (कर्ण के अतिरिक्त), को उसके कर्ण के परितः घुमाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त द्वि-शंकु (double cone) के आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π का मान जो भी उपयुक्त लगे, प्रयोग कीजिए।)

3. एक टंकी, जिसके आंतरिक मापन 150 cm × 120 cm × 110 cm हैं, में 129600 cm^3 पानी है। इस पानी में कुछ छिद्र वाली ईंटें तब तक डाली जाती हैं, जब तक कि टंकी पूरी ऊपर तक भर न जाए। प्रत्येक ईंट अपने आयतन का $\frac{1}{17}$ पानी सोख लेती है। यदि प्रत्येक ईंट की माप 22.5 cm × 7.5 cm × 6.5 cm हैं, तो टंकी में कुल कितनी ईंटें डाली जा सकती हैं, ताकि उसमें से पानी बाहर न बहे?

4. किसी महीने के 15 दिनों में, एक नदी की घाटी में 10 cm वर्षा हुई। यदि इस घाटी का क्षेत्रफल 7280 km^2 है, तो दर्शाइए कि कुल वर्षा लगभग तीन नदियों के सामान्य पानी के योग के समतुल्य थी, जबकि प्रत्येक नदी 1072 km लंबी, 75 m चौड़ी और 3 m गहरी है।

5. टीन की बनी हुई एक तेल की कुप्पी 10 cm लंबे एक बेलन में एक शंकु के छिन्नक को जोड़ने से बनी है। यदि इसकी कुल ऊँचाई 22 cm है, बेलनाकार भाग का व्यास 8 cm है और कुप्पी के ऊपरी सिरे का व्यास 18 cm है, तो इसके बनाने में लगी टीन की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति 13.25)।



आकृति 13.25

6. शंकु के एक छिन्नक के लिए, पूर्व स्पष्ट किए संकेतों का प्रयोग करते हुए, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल और संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल के उन सूत्रों को सिद्ध कीजिए, जो अनुच्छेद 13.5 में दिए गए हैं।

7. शंकु के एक छिन्नक के लिए, पूर्व स्पष्ट किए संकेतों का प्रयोग करते हुए, आयतन का वह सूत्र सिद्ध कीजिए, जो अनुच्छेद 13.5 में दिया गया है।

* यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं दी गई है।

13.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है :

1. आधारभूत ठोसों घनाभ, बेलन, शंकु और गोले और अर्धगोले में से किन्हीं दो ठोसों के संयोजन (को मिलाने से) से बने ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल निर्धारित करना।
2. ठोसों घनाभ, बेलन, शंकु, गोले और अर्धगोले में से किन्हीं दो ठोसों के संयोजन से बने ठोसों के आयतन ज्ञात करना।
3. जब किसी शंकु को उसके आधार के समांतर किसी तल द्वारा काटकर एक छोटा शंकु हटा देते हैं, तो जो ठोस बचता है, वह शंकु का एक छिन्नक कहलाता है।
4. शंकु के छिन्नक से संबद्ध सूत्र निम्नलिखित हैं :

   (i) शंकु के छिन्नक का आयतन $= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$

   (ii) शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi l(r_1 + r_2)$ जहाँ $l = \sqrt{h^2 + \left(r_1 - r_2\right)^2}$

   (iii) शंकु के छिन्नक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi l(r_1 + r_2) + \pi(r_1^2 + r_2^2)$

   उपरोक्त सूत्रों में, h = छिन्नक की (ऊर्ध्वाधर) ऊँचाई, l = छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई तथा r_1 और r_2 छिन्नक के दोनों वृत्तीय सिरों की त्रिज्याएँ हैं।

1063CH14

सांख्यिकी (Statistics) 14

14.1 भूमिका

कक्षा IX में, आप दिए हुए आँकड़ों को अवर्गीकृत एवं वर्गीकृत बारंबारता बंटनों में व्यवस्थित करना सीख चुके हैं। आपने आँकड़ों को चित्रीय रूप से विभिन्न आलेखों, जैसे दंड आलेख, आयत चित्र (इनमें असमान चौड़ाई वाले वर्ग अंतराल भी सम्मिलित थे) और बारंबारता बहुभुजों के रूप में निरूपित करना भी सीखा था। तथ्य तो यह है कि आप अवर्गीकृत आँकड़ों के कुछ संख्यात्मक प्रतिनिधि (numerical represenتives) ज्ञात करके एक कदम आगे बढ़ गए थे। इन संख्यात्मक प्रतिनिधियों को *केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक (measures of central tendency)* कहते हैं। हमने ऐसे तीन मापकों अर्थात् *माध्य (mean), माध्यक (median)* और *बहुलक (mode)* का अध्ययन किया था। इस अध्याय में, हम इन तीनों मापकों, अर्थात् माध्य, माध्यक और बहुलक, का अध्ययन अवर्गीकृत आँकड़ों से वर्गीकृत आँकड़ों के लिए आगे बढ़ाएँगे। हम संचयी बारंबारता (cumulative frequency) और संचयी बारंबारता सारणी की अवधारणाओं की चर्चा भी करेंगे तथा यह भी सीखेंगे कि संचयी बारंबारता वक्रों (cumulative frequency curves), जो *तोरण (ogives)* कहलाती हैं, को किस प्रकार खींचा जाता है।

14.2 वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

जैसाकि हम पहले से जानते हैं, दिए हुए प्रेक्षणों का माध्य (या औसत) सभी प्रेक्षणों के मानों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देकर प्राप्त किया जाता है। कक्षा IX से, याद कीजिए कि यदि प्रेक्षणों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ की बारंबारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, \ldots, f_n$ हों, तो इसका अर्थ है कि प्रेक्षण x_1, f_1 बार आता है; प्रेक्षण x_2, f_2 बार आता है, इत्यादि।

अब, सभी प्रेक्षणों के मानों का योग $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$ है तथा प्रेक्षणों की संख्या $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ है।

अतः, इनका माध्य $\overline{x}$ निम्नलिखित द्वारा प्राप्त होगा :

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

याद कीजिए कि उपरोक्त को संक्षिप्त रूप में एक यूनानी अक्षर Σ [बड़ा सिगमा (capital sigma)] से व्यक्त करते हैं। इस अक्षर का अर्थ है *जोड़ना* (*summation*) अर्थात्

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

इसे और अधिक संक्षिप्त रूप में, $\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$ लिखते हैं, यह समझते हुए कि i का मान 1 से n तक विचरण करता है।

आइए इस सूत्र का निम्नलिखित उदाहरण में माध्य ज्ञात करने के लिए उपयोग करें।

उदाहरण 1 : किसी स्कूल की कक्षा X के 30 विद्यार्थियों द्वारा गणित के एक पेपर में, 100 में से प्राप्त किए गए अंक, नीचे एक सारणी में दिए गए हैं। इन विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

हल : याद कीजिए कि माध्य ज्ञात करने के लिए, हमें प्रत्येक x_i से उसकी संगत बारंबारता f_i द्वारा गुणनफल की आवश्यकता है। अतः, आइए इन गुणनफलों को सारणी 14.1 में दर्शाए अनुसार एक स्तंभ में रखें।

सारणी 14.1

प्राप्तांक (x_i)	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
योग	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 1779$

अब $$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

अत:, प्राप्त किया गया माध्य अंक 59.3 है।

हमारे दैनिक जीवन की अधिकांश स्थितियों में, आँकड़े इतने बड़े होते हैं कि उनका एक अर्थपूर्ण अध्ययन करने के लिए उन्हें समूहों में बाँट कर (वर्गीकृत करके) छोटा किया जाता है। अत:, हमें दिए हुए अवर्गीकृत आँकड़ों को, वर्गीकृत आँकड़ों में बदलने की आवश्यकता होती है तथा इन आँकड़ों के माध्य ज्ञात करने की विधि निकालने की आवश्यकता होती है।

आइए उदाहरण 1 के अवर्गीकृत आँकड़ों को चौड़ाई, मान लीजिए, 15 के वर्ग अंतराल बनाकर वर्गीकृत आँकड़ों में बदलें। याद रखिए कि वर्ग अंतरालों की बारंबारताएँ निर्दिष्ट करते समय, किसी उपरि वर्ग सीमा (upper class limit) में आने वाले प्रेक्षण अगले वर्ग अंतराल में लिए जाते हैं। उदाहरणार्थ, अंक 40 प्राप्त करने वाले 4 विद्यार्थियों को वर्ग अंतराल 25-40 में न लेकर अंतराल 40-55 में लिया जाता है। इस परंपरा को ध्यान में रखते हुए, आइए इनकी एक वर्गीकृत बारंबारता सारणी बनाएँ (देखिए सारणी 14.2)।

सारणी 14.2

वर्ग अंतराल	10 - 25	25 - 40	40 - 55	55 - 70	70 - 85	85 - 100
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	7	6	6	6

अब, प्रत्येक वर्ग अंतराल के लिए, हमें एक ऐसे बिंदु (मान) की आवश्यकता है, जो पूरे अंतराल का प्रतिनिधित्व करे। यह मान *लिया जाता है कि प्रत्येक वर्ग अंतराल की बारंबारता उसके मध्य-बिंदु के चारों ओर केंद्रित होती है।* अत:, प्रत्येक वर्ग के मध्य-बिंदु (mid-point) [या वर्ग चिह्न (class mark)] को उस वर्ग में आने वाले सभी प्रेक्षणों का प्रतिनिधि (representative) माना जा सकता है। याद कीजिए कि हम एक वर्ग अंतराल का मध्य बिंदु (या वर्ग चिह्न) उसकी उपरि और निचली सीमाओं का औसत निकालकर ज्ञात करते हैं। अर्थात्

$$\textbf{वर्ग चिह्न} = \frac{\textbf{उपरि वर्ग सीमा} + \textbf{निचली वर्ग सीमा}}{\textbf{2}}$$

सारणी 14.2 के संदर्भ में, वर्ग 10–25 का वर्ग चिह्न $\frac{10+25}{2}$, अर्थात् 17.5 है। इसी प्रकार, हम अन्य वर्ग अंतरालों के वर्ग चिह्न ज्ञात कर सकते हैं। हम इन वर्ग चिह्नों को सारणी 14.3 में रखते हैं। ये वर्ग चिह्न x_i's का काम करते हैं। व्यापक रूप में वर्ग अंतराल के वर्ग चिह्न x_i के संगत बारंबारता f_i लिखी जाती है। अब हम उदाहरण 1 की ही तरह, माध्य परिकलित करने की प्रक्रिया की ओर आगे बढ़ सकते हैं।

सारणी 14.3

वर्ग अंतराल	**विद्यार्थियों की संख्या (f_i)**	**वर्ग चिह्न (x_i)**	f_ix_i
10 - 25	2	17.5	35.0
25 - 40	3	32.5	97.5
40 - 55	7	47.5	332.5
55 - 70	6	62.5	375.0
70 - 85	6	77.5	465.0
85 – 100	6	92.5	555.0
योग	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_ix_i = 1860.0$

अंतिम स्तंभ में दिए मानों के योग से हमें $\Sigma f_i x_i$ प्राप्त होता है। अत:, दिए हुए आँकड़ों का माध्य $\overline{x}$, नीचे दर्शाए अनुसार प्राप्त होता है:

$$\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

माध्य ज्ञात करने की इस नयी विधि को **प्रत्यक्ष विधि (direct method)** कहा जा सकता है।

हम देखते हैं कि सारणियों 14.1 और 14.3 में, समान आँकड़ों का प्रयोग किया गया है तथा इनमें माध्य परिकलित करने के लिए एक ही सूत्र का प्रयोग किया गया है। परंतु इन दोनों में हमें परिणाम (माध्य) भिन्न-भिन्न प्राप्त हुए हैं। क्या आप सोच सकते हैं कि ऐसा क्यों हुआ है और इनमें से कौन-सा माध्य अधिक सही है? दोनों मानों के अंतर का कारण सारणी 14.3 में की गई *मध्य-बिंदु कल्पना* है। 59.3 सही माध्य है, जबकि 62 एक सन्निकट माध्य है।

कभी-कभी जब x_i और f_i के मान बड़े होते हैं, तो x_i और f_i के गुणनफल ज्ञात करना जटिल हो जाता है तथा इसमें समय भी अधिक लगता है। अत:, ऐसी स्थितियों के लिए, आइए इन परिकलनों को सरल बनाने की विधि सोचें।

हम f_i के साथ कुछ नहीं कर सकते, परंतु हम प्रत्येक x_i को एक छोटी संख्या में बदल सकते हैं, जिससे हमारे परिकलन सरल हो जाएँगे। हम ऐसा कैसे करेंगे? प्रत्येक x_i में से एक निश्चित संख्या घटाने के बारे में आपका क्या विचार है? आइए यह विधि अपनाने का प्रयत्न करें।

इसमें पहला चरण यह हो सकता है कि प्राप्त किए गए सभी x_i में से किसी x_i को *कल्पित माध्य (assumed mean)* के रूप में चुन लें तथा इसे 'a' से व्यक्त करें। साथ ही, अपने परिकलन कार्य को और अधिक कम करने के लिए, हम 'a' को ऐसा x_i ले सकते हैं जो $x_1, x_2, \ldots, x_n$ के मध्य में कहीं आता हो। अत:, हम $a = 47.5$ या $a = 62.5$ चुन सकते हैं। आइए $a = 47.5$ चुनें।

अगला चरण है कि a और प्रत्येक x_i के बीच का अंतर d_i ज्ञात किया जाए, अर्थात् प्रत्येक x_i से 'a' का *विचलन (deviation)* ज्ञात किया जाए।

अर्थात्
$$d_i = x_i - a$$
$$= x_i - 47.5$$

तीसरा चरण है कि प्रत्येक d_i और उसके संगत f_i का गुणनफल ज्ञात करके सभी $f_i d_i$ का योग ज्ञात किया जाए। ये परिकलन सारणी 14.4 में दर्शाए गए हैं।

सारणी 14.4

वर्ग अंतराल	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	–30	–60
25 - 40	3	32.5	–15	–45
40 - 55	7	47.5	0	0
55 - 70	6	62.5	15	90
70 - 85	6	77.5	30	180
85 - 100	6	92.5	45	270
योग	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i d_i = 435$

अत:, सारणी 14.4 से, विचलनों का माध्य $\bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

आइए, अब $\bar{d}$ और $\bar{x}$ में संबंध ज्ञात करने का प्रयत्न करें।

चूँकि d_i ज्ञात करने के लिए हमने प्रत्येक x_i में से a को घटाया है, इसलिए माध्य $\bar{x}$ ज्ञात करने के लिए, हम $\bar{d}$ में a जोड़ते हैं। इसे गणितीय रूप से, नीचे दर्शाए अनुसार स्पष्ट किया जा सकता है :

विचलनों का माध्य $\quad \bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

अत: $\quad \bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a$$

अत: $\quad \bar{x} = a + \bar{d}$

अर्थात् $\quad \bar{x} = a + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

अब सारणी 14.4 से, a, $\Sigma f_i d_i$ और Σf_i के मान रखने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

अतः, विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का माध्य 62 है।

माध्य ज्ञात करने की उपरोक्त विधि **कल्पित माध्य विधि (assumed mean method)** कहलाती है।

क्रियाकलाप 1 : सारणी 14.3 से, प्रत्येक x_i (17.5, 32.5, इत्यादि) को 'a' मानकर माध्य परिकलित कीजिए। आप क्या देखते हैं? आप पाएँगे कि प्रत्येक स्थिति में माध्य एक ही, अर्थात् 62 आता है। (क्यों?)

अतः, हम यह कह सकते हैं कि प्राप्त किए गए माध्य का मान चुने हुए 'a' के मान पर निर्भर नहीं करता।

ध्यान दीजिए कि सारणी 14.4 के स्तंभ में दिए सभी मान 15 के गुणज (multiples) हैं। अतः, यदि हम स्तंभ 4 के सभी मानों को 15 से भाग दे दें, तो हमें f_i से गुणा करने के लिए छोटी संख्याएँ प्राप्त हो जाएँगी। [यहाँ 15, प्रत्येक वर्ग अंतराल की वर्ग माप (साइज) है।]

अतः, आइए मान लें कि $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ है, जहाँ a कल्पित माध्य है और h वर्गमाप है।

अब हम सभी u_i परिकलित करते हैं और पहले की तरह ही प्रक्रिया जारी रखते हैं (अर्थात् $f_i u_i$ ज्ञात करते हैं और फिर $\Sigma f_i u_i$ ज्ञात करते हैं। आइए $h = 15$ लेकर, सारणी 14.5 बनाएँ।

सारणी 14.5

वर्ग अंतराल	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10 - 25	2	17.5	–30	–2	–4
25 - 40	3	32.5	–15	–1	–3
40 - 55	7	47.5	0	0	0
55 - 70	6	62.5	15	1	6
70 - 85	6	77.5	30	2	12
85 - 100	6	92.5	45	3	18
योग	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_i u_i = 29$

मान लीजिए $$\bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} \text{ है।}$$

यहाँ भी हम $\bar{u}$ और $\bar{x}$ में संबंध ज्ञात करेंगे।

हमें प्राप्त है $$u_i = \frac{x_i - a}{h}$$

अत: $$\bar{u} = \frac{\Sigma f_i \dfrac{(x_i - a)}{h}}{\Sigma f_i} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i - a\,\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - a\,\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}[\bar{x} - a]$$

या $$h\bar{u} = \bar{x} - a$$

अर्थात् $$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

अत: $$\bar{x} = a + h\left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$$

अब, सारणी 14.5 से $a, h, \Sigma f_i u_i$ और Σf_i के मान प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\bar{x} = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30}\right)$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

अत:, विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किया गया माध्य अंक 62 है।

माध्य ज्ञात करने की उपरोक्त विधि **पग-विचलन विधि (step deviation method)** कहलाती है।

ध्यान दीजिए कि

- पग-विचलन विधि तभी सुविधाजनक होगी, जबकि सभी d_i में कोई सार्व गुणनखंड है।
- तीनों विधियों से प्राप्त माध्य एक ही है।

- कल्पित माध्य विधि और पग-विचलन विधि प्रत्यक्ष विधि के ही सरलीकृत रूप हैं।
- सूत्र $\overline{x} = a + h\overline{u}$ का तब भी प्रयोग किया जा सकता है, जबकि a और h ऊपर दी हुई संख्याओं की भाँति न हों, बल्कि वे शून्य के अतिरिक्त ऐसी वास्तविक संख्याएँ हों ताकि $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ हो।

आइए इन विधियों का प्रयोग एक अन्य उदाहरण से करें।

उदाहरण 2 : नीचे दी हुई सारणी भारत के विभिन्न राज्यों एवं संघीय क्षेत्रों (union territories) के ग्रामीण क्षेत्रों के प्राथमिक विद्यालयों में, महिला शिक्षकों के प्रतिशत बंटन को दर्शाती है। इस अनुच्छेद में चर्चित तीनों विधियों से महिला शिक्षकों का माध्य प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

महिला शिक्षकों का प्रतिशत	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85
राज्यों/संघीय क्षेत्रों की संख्या	6	11	7	4	4	2	1

(स्रोत: एन.सी.ई.आर.टी द्वारा किया गया सातवाँ अखिल भारतीय स्कूल शिक्षा सर्वे)

हल : आइए प्रत्येक वर्ग अंतराल का x_i ज्ञात करें और उन्हें एक स्तंभ में रखें (देखिए सारणी 14.6)।

सारणी 14.6

महिला शिक्षकों का प्रतिशत	**राज्यों/संघीय क्षेत्रों की संख्या (f_i)**	x_i
15 - 25	6	20
25 - 35	11	30
35 - 45	7	40
45 - 55	4	50
55 - 65	4	60
65 - 75	2	70
75 - 85	1	80

यहाँ, हम $a = 50$, $h = 10$, लेते हैं। तब $d_i = x_i - 50$ और $u_i = \frac{x_i - 50}{10}$ होगा।

अब हम d_i और u_i ज्ञात करते हैं और इन्हें सारणी 14.7 में रखते हैं।

सारणी 14.7

महिला शिक्षकों का प्रतिशत	राज्यों/संघीय क्षेत्रों की संख्या (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 - 25	6	20	–30	–3	120	–180	–18
25 - 35	11	30	–20	–2	330	–220	–22
35 - 45	7	40	–10	–1	280	–70	–7
45 - 55	4	50	0	0	200	0	0
55 - 65	4	60	10	1	240	40	4
65 - 75	2	70	20	2	140	40	4
75 - 85	1	80	30	3	80	30	3
योग	**35**				**1390**	**–360**	**–36**

उपरोक्त सारणी से, हमें $\Sigma f_i = 35$, $\Sigma f_i x_i = 1390$, $\Sigma f_i d_i = -360$, $\Sigma f_i u_i = -36$ प्राप्त होता है।

प्रत्यक्ष विधि का प्रयोग करने से, $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

कल्पित माध्य विधि का प्रयोग करने से,

$$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$$

पग-विचलन विधि के प्रयोग से,

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h = 50 + \left(\frac{-36}{35}\right) \times 10 = 39.71$$

अत:, ग्रामीण क्षेत्रों के प्राथमिक विद्यालयों में महिला शिक्षकों का माध्य प्रतिशत 39.71 है।

टिप्पणी : सभी तीनों विधियों से प्राप्त परिणाम एक ही समान है। अतः, माध्य ज्ञात करने की विधि चुनना इस बात पर निर्भर करता है कि x_i और f_i के मान क्या हैं। यदि x_i और f_i पर्याप्त रूप से छोटे हैं, तो प्रत्यक्ष विधि ही उपयुक्त रहती है। यदि x_i और f_i के मान संख्यात्मक रूप से बड़े हैं, तो हम कल्पित माध्य विधि या पग-विचलन विधि का प्रयोग कर सकते हैं। यदि वर्गमाप असमान हैं और x_i संख्यात्मक रूप से बड़े हैं, तो भी हम सभी d_i का एक उपयुक्त सर्वनिष्ठ गुणनखंड h लेकर, पग-विचलन विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : नीचे दिया हुआ बंटन एकदिवसीय क्रिकेट मैचों में, गेंदबाज़ों द्वारा लिए गए विकिटों की संख्या दर्शाता है। उपयुक्त विधि चुनते हुए, लिए गए विकिटों का माध्य ज्ञात कीजिए। यह माध्य क्या सूचित करता है?

विकिटों की संख्या	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 - 450
गेंदबाज़ों की संख्या	7	5	16	12	2	3

हल : यहाँ वर्ग माप भिन्न-भिन्न हैं तथा x_i संख्यात्मक रूप से बड़े हैं। आइए $a = 200$ और $h = 20$ लेकर पग-विचलन विधि का प्रयोग करें। तब, हम सारणी 14.8 में दर्शाए अनुसार आँकड़े प्राप्त करते हैं :

सारणी 14.8

लिए गए विकिटों की संख्या	**गेंदबाज़ों की संख्या (f_i)**	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f_i$
20 - 60	7	40	–160	–8	–56
60 - 100	5	80	–120	–6	–30
100 - 150	16	125	–75	–3.75	–60
150 - 250	12	200	0	0	0
250 - 350	2	300	100	5	10
350 - 450	3	400	200	10	30
योग	**45**				**–106**

अत:, $\overline{u} = \frac{-106}{45}$ है। इसलिए, $\overline{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89$ है।

यह हमें बताता है कि उपरोक्त 45 गेंदबाज़ों ने एकदिवसीय क्रिकेट मैचों में 152.89 की औसत से विकिट लिए हैं।

आइए देखें कि इस अनुच्छेद में पढ़ी अवधारणाओं को आप किस प्रकार अनुप्रयोग कर सकते हैं।

क्रियाकलाप 2 :

अपनी कक्षा के विद्यार्थियों को तीन समूहों में बाँटिए और प्रत्येक समूह से निम्नलिखित में से एक क्रियाकलाप करने को कहिए :

1. आपके स्कूल द्वारा हाल ही में ली गई परीक्षा में, अपनी कक्षा के सभी विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्त किए गए अंक एकत्रित कीजिए। इस प्रकार प्राप्त आँकड़ों का एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।
2. अपने शहर में 30 दिन का रिकॉर्ड किए गए दैनिक अधिकतम तापमान एकत्रित कीजिए। इन आँकड़ों को एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए।
3. अपनी कक्षा के सभी विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ (cm में) मापिए और उनका एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

जब सभी समूह आँकड़े एकत्रित करके उनकी वर्गीकृत बारंबारता बंटन सारणियाँ बना लें, तब प्रत्येक समूह से अपने बारंबारता बंटन का माध्य निकालने को कहिए। इसमें वे जो विधि उपयुक्त समझें उसका प्रयोग करें।

प्रश्नावली 14.1

1. विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा अपने पर्यावरण संचेतना अभियान के अंतर्गत एक सर्वेक्षण किया गया, जिसमें उन्होंने एक मोहल्ले के 20 घरों में लगे हुए पौधों से संबंधित निम्नलिखित आँकड़े एकत्रित किए। प्रति घर माध्य पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

पौधों की संख्या	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

माध्य ज्ञात करने के लिए आपने किस विधि का प्रयोग किया और क्यों?

2. किसी फैक्टरी के 50 श्रमिकों की दैनिक मज़दूरी के निम्नलिखित बंटन पर विचार कीजिए:

दैनिक मज़दूरी (रुपयों में)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

एक उपयुक्त विधि का प्रयोग करते हुए, इस फैक्ट्री के श्रमिकों की माध्य दैनिक मज़दूरी ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेबखर्च दर्शाता है। माध्य जेबखर्च ₹ 18 है। लुप्त बारंबारता f ज्ञात कीजिए :

दैनिक जेब भत्ता (रुपयों में)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

4. किसी अस्पताल में, एक डॉक्टर द्वारा 30 महिलाओं की जाँच की गई और उनके हृदय स्पंदन (beat) की प्रति मिनट संख्या नोट करके नीचे दर्शाए अनुसार संक्षिप्त रूप में लिखी गई। एक उपयुक्त विधि चुनते हुए, इन महिलाओं के हृदय स्पंदन की प्रति मिनट माध्य संख्या ज्ञात कीजिए :

हृदय स्पंदन की प्रति मिनट संख्या	65 - 68	68 - 71	71 - 74	74 - 77	77 - 80	80 - 83	83 - 86
महिलाओं की संख्या	2	4	3	8	7	4	2

5. किसी फुटकर बाज़ार में, फल विक्रेता पेटियों में रखे आम बेच रहे थे। इन पेटियों में आमों की संख्याएँ भिन्न-भिन्न थीं। पेटियों की संख्या के अनुसार, आमों का बंटन निम्नलिखित था :

आमों की संख्या	50 - 52	53 - 55	56 - 58	59 - 61	62 - 64
पेटियों की संख्या	15	110	135	115	25

एक पेटी में रखे आमों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए। आपने माध्य ज्ञात करने की किस विधि का प्रयोग किया है?

6. निम्नलिखित सारणी किसी मोहल्ले के 25 परिवारों में भोजन पर हुए दैनिक व्यय को दर्शाती है :

दैनिक व्यय (रुपयों में)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
परिवारों की संख्या	4	5	12	2	2

एक उपयुक्त विधि द्वारा भोजन पर हुआ माध्य व्यय ज्ञात कीजिए।

7. वायु में सल्फर डाई–ऑक्साइड (SO_2) की सांद्रता (भाग प्रति मिलियन में) को ज्ञात करने के लिए, एक नगर के 30 मोहल्लों से आँकड़े एकत्रित किए गए, जिन्हें नीचे प्रस्तुत किया गया है :

SO_2 की सांद्रता	बारंबारता
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

वायु में SO_2 की सांद्रता का माध्य ज्ञात कीजिए।

8. किसी कक्षा अध्यापिका ने पूरे सत्र के लिए अपनी कक्षा के 40 विद्यार्थियों की अनुपस्थिति निम्नलिखित रूप में रिकॉर्ड (record) की। एक विद्यार्थी जितने दिन अनुपस्थित रहा उनका माध्य ज्ञात कीजिए :

दिनों की संख्या	0 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 20	20 - 28	28 - 38	38 - 40
विद्यार्थियों की संख्या	11	10	7	4	4	3	1

9. निम्नलिखित सारणी 35 नगरों की साक्षरता दर (प्रतिशत में) दर्शाती है। माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए :

साक्षरता दर (% में)	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
नगरों की संख्या	3	10	11	8	3

14.3 वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक

कक्षा IX से याद कीजिए कि बहुलक (mode) दिए हुए प्रेक्षणों में वह मान है जो सबसे अधिक बार आता है, अर्थात् उस प्रेक्षण का मान जिसकी बारंबारता अधिकतम है। साथ ही, हमने अवर्गीकृत आँकड़ों के बहुलक ज्ञात करने की भी चर्चा कक्षा IX में की थी। यहाँ, हम वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करने की विधि की चर्चा करेंगे। यह संभव है कि एक

से अधिक मानों की एक ही अधिकतम बारंबारता हो। ऐसी स्थितियों में, आँकड़ों को *बहुबहुलकीय* (*multi modal*) आँकड़े कहा जाता है। यद्यपि, वर्गीकृत आँकड़े भी बहुबहुलकीय हो सकते हैं, परंतु हम अपनी चर्चा को केवल एक ही बहुलक वाली समस्याओं तक ही सीमित रखेंगे।

आइए पहले एक उदाहरण की सहायता से यह याद करें कि अवर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक हमने किस प्रकार ज्ञात किया था।

उदाहरण 4 : किसी गेंदबाज़ द्वारा 10 क्रिकेट मैचों में लिए गए विकिटों की संख्याएँ निम्नलिखित हैं :

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : आइए उपरोक्त आँकड़ों के लिए, एक बारंबारता बंटन सारणी बनाएँ, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

विकिटों की संख्या	0	1	2	3	4	5	6
क्रिकेट मैचों की संख्या	1	1	3	2	1	1	1

स्पष्ट है कि गेंदबाज़ ने अधिकतम मैचों (3) में 2 विकिट लिए हैं। अतः, इन आँकड़ों का बहुलक 2 है।

एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन में, बारंबारताओं को देखकर बहुलक ज्ञात करना संभव नहीं है। यहाँ, हम केवल वह वर्ग (class) ज्ञात कर सकते हैं जिसकी बारंबारता अधिकतम है। इस वर्ग को **बहुलक वर्ग (modal class)** कहते हैं। बहुलक इस बहुलक वर्ग के अंदर कोई मान है, जिसे निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है :

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

जहाँ l = बहुलक वर्ग की निम्न (निचली) सीमा

h = वर्ग अंतराल की माप (यह मानते हुए कि सभी अंतराल बराबर मापों के हैं)

f_1 = बहुलक वर्ग की बारंबारता

f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की बारंबारता तथा

f_2 = बहुलक वर्ग के ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता है।

इस सूत्र का प्रयोग दर्शाने के लिए, आइए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 5 : विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा एक मोहल्ले के 20 परिवारों पर किए गए सर्वेक्षण के परिणामस्वरूप विभिन्न परिवारों के सदस्यों की संख्या से संबंधित निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त हुए :

परिवार माप	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
परिवारों की संख्या	7	8	2	2	1

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, अधिकतम वर्ग बारंबारता 8 है तथा इस बारंबारता का संगत वर्ग 3–5 है। अत:, बहुलक वर्ग 3–5 है।

अब,

बहुलक वर्ग = 3 - 5, बहुलक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 3 तथा वर्ग माप (h) = 2 है।

बहुलक वर्ग की बारंबारता (f_1) = 8

बहुलक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की बारंबारता (f_0) = 7 तथा

बहुलक वर्ग के ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता (f_2) = 2 है।

आइए इन मानों को सूत्र में प्रतिस्थापित करें। हमें प्राप्त होता है :

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

अत:, उपरोक्त आँकड़ों का बहुलक 3.286 है।

उदाहरण 6 : गणित की एक परीक्षा में 30 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का बंटन उदाहरण 1 की सारणी 14.3 में दिया गया है। इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए। साथ ही, बहुलक और माध्य की तुलना कीजिए और इनकी व्याख्या कीजिए।

हल : उदाहरण 1 की सारणी 14.3 को देखिए। चूँकि अधिकतम विद्यार्थियों की संख्या (7) वाला अंतराल 40–55 है, इसलिए बहुलक वर्ग 40–55 है। अत:,

बहुलक वर्ग की निम्न सीमा (l) = 40 है,

वर्ग माप (h) = 15 है,

बहुलक वर्ग की बारंबारता (f_1) = 7 है,

बहुलक वर्ग से ठीक पहले आने वाले वर्ग की बारंबारता (f_0) = 3 है,

तथा बहुलक वर्ग के ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता (f_2) = 6 है।

अब, सूत्र का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 40 + \left(\frac{7-3}{14-6-3}\right) \times 15 = 52$$

अत:, बहुलक अंक 52 है।

अब, उदाहरण 1 से आप जानते हैं कि माध्य अंक 62 है।

अत:, अधिकतम विद्यार्थियों का अंक 52 है तथा औसत के रूप में प्रत्येक विद्यार्थी ने 62 अंक प्राप्त किए हैं।

टिप्पणी :

1. उदाहरण 6 में, बहुलक माध्य से छोटा है। परंतु किन्हीं और समस्याओं (प्रश्नों) के लिए यह माध्य के बराबर या उससे बड़ा भी हो सकता है।

2. यह स्थिति की माँग पर निर्भर करता है कि हमारी रुचि विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए औसत अंकों में है या फिर अधिकतम विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए औसत अंकों में है। पहली स्थिति में, माध्य की आवश्यकता होगी तथा दूसरी स्थिति में बहुलक की आवश्यकता होगी।

क्रियाकलाप 3 : क्रियाकलाप 2 में बनाए गए समूहों और उनको निर्दिष्ट किए कार्यों के साथ क्रियाकलाप जारी रखिए। प्रत्येक समूह से आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करने को कहिए। उनसे इसकी तुलना माध्य से करने को कहिए तथा दोनों के अर्थों की व्याख्या करने को कहिए।

टिप्पणी : असमान वर्ग मापों वाले वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक भी परिकलित किया जा सकता है। परंतु यहाँ हम इसकी चर्चा नहीं करेंगे।

प्रश्नावली 14.2

1. निम्नलिखित सारणी किसी अस्पताल में एक विशेष वर्ष में भर्ती हुए रोगियों की आयु को दर्शाती है :

आयु (वर्षों में)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

उपरोक्त आँकड़ों के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए। दोनों केंद्रीय प्रवृत्ति की मापों की तुलना कीजिए और उनकी व्याख्या कीजिए।

2. निम्नलिखित आँकड़े, 225 बिजली उपकरणों के प्रेक्षित जीवन काल (घंटों में) की सूचना देते हैं :

जीवनकाल (घंटों में)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
बारंबारता	10	35	52	61	38	29

उपकरणों का बहुलक जीवनकाल ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित आँकड़े किसी गाँव के 200 परिवारों के कुल मासिक घरेलू व्यय के बंटन को दर्शाते हैं। इन परिवारों का बहुलक मासिक व्यय ज्ञात कीजिए। साथ ही, माध्य मासिक व्यय भी ज्ञात कीजिए।

व्यय (₹ में)	परिवारों की संख्या
1000 - 1500	24
1500 - 2000	40
2000 - 2500	33
2500 - 3000	28
3000 - 3500	30
3500 - 4000	22
4000 - 4500	16
4500 - 5000	7

4. निम्नलिखित बंटन भारत के उच्चतर माध्यमिक स्कूलों में, राज्यों के अनुसार, शिक्षक-विद्यार्थी अनुपात को दर्शाता है। इन आँकड़ों के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए। दोनों मापकों की व्याख्या कीजिए।

प्रति शिक्षक विद्यार्थियों की संख्या	राज्य/संघीय क्षेत्रों की संख्या
15 - 20	3
20 - 25	8
25 - 30	9
30 - 35	10
35 - 40	3
40 - 45	0
45 - 50	0
50 - 55	2

5. दिया हुआ बंटन विश्व के कुछ श्रेष्ठतम बल्लेबाज़ों द्वारा एकदिवसीय अंतर्राष्ट्रीय क्रिकेट मैचों में बनाए गए रनों को दर्शाता है :

बनाए गए रन	बल्लेबाज़ों की संख्या
3000 - 4000	4
4000 - 5000	18
5000 - 6000	9
6000 - 7000	7
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3
9000 - 10,000	1
10,000 - 11,000	1

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

6. एक विद्यार्थी ने एक सड़क के किसी स्थान से होकर जाती हुई कारों की संख्याएँ नोट की और उन्हें नीचे दी हुई सारणी के रूप में व्यक्त किया। सारणी में दिया प्रत्येक प्रेक्षण 3 मिनट के अंतराल में उस स्थान से होकर जाने वाली कारों की संख्याओं से संबंधित है। ऐसे 100 अंतरालों पर प्रेक्षण लिए गए। इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

कारों की संख्या	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
बारंबारता	7	14	13	12	20	11	15	8

14.4 वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक

जैसाकि आप कक्षा IX में पढ़ चुके हैं, *माध्यक (median)* केंद्रीय प्रवृत्ति का ऐसा मापक है, जो आँकड़ों में सबसे बीच के प्रेक्षण का मान देता है। याद कीजिए कि अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक ज्ञात करने के लिए, पहले हम प्रेक्षणों के मानों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। अब, यदि n विषम है, तो माध्यक $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें प्रेक्षण का मान होता है। यदि n सम है, तो माध्यक $\frac{n}{2}$ वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षणों के मानों का औसत (माध्य) होता है।

माना, हमें निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात करना है जो एक परीक्षा में 100 विद्यार्थियों द्वारा 50 में से प्राप्त अंक देते हैं।

प्राप्तांक	20	29	28	33	42	38	43	25
विद्यार्थियों की संख्या	6	28	24	15	2	4	1	20

पहले प्राप्त अंकों का आरोही क्रम तैयार करें और बारंबारता सारणी को निम्न प्रकार से बनाएँ।

सारणी 14.9

प्राप्तांक	**विद्यार्थियों की संख्या बारंबारता**
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
योग	**100**

यहाँ $n = 100$ है जो सम संख्या है। माध्यक प्रेक्षण $\frac{n}{2}$वें तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)$वें प्रेक्षण का औसत होगा। अर्थात् 50वें तथा 51वें प्रेक्षणों का औसत। इन प्रेक्षणों को ज्ञात करने के लिए, हम निम्न प्रकार बढ़ते हैं।

सारणी 14.10

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
20	6
25 तक	$6 + 20 = 26$
28 तक	$26 + 24 = 50$
29 तक	$50 + 28 = 78$
33 तक	$78 + 15 = 93$
38 तक	$93 + 4 = 97$
42 तक	$97 + 2 = 99$
43 तक	$99 + 1 = 100$

अब हम इस सूचना को दर्शाता एक नया स्तंभ उपरोक्त बारंबारता सारणी में जोड़ते हैं तथा उसे संचयी बारंबारता स्तंभ का नाम देते हैं।

सारणी 14.11

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी बारंबारता
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

उपरोक्त सारणी से हम पाते हैं:

50वाँ प्रेक्षण 28 है (क्यों?)

51वाँ प्रेक्षण 29 है

इसलिए, माध्यक $= \frac{28+29}{2} = 28.5$

टिप्पणी : सारणी 14.11 के भाग में सम्मिलित स्तंभ 1 और 3 *संचयी बारंबारता सारणी* के नाम से जाना जाता है। माध्यक अंक 28.5 सूचित करता है कि लगभग 50 प्रतिशत विद्यार्थियों ने 28.5 से कम अंक और दूसरे अन्य 50 प्रतिशत विद्यार्थियों ने 28.5 से अधिक अंक प्राप्त किए।

आइए देखें कि निम्नलिखित स्थिति में समूहित आँकड़े का माध्यक कैसे प्राप्त करते हैं।

निम्नानुसार एक निश्चित परीक्षा में 100 में 53 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का समूहित बारंबारता बंटन पर विचार करें।

सारणी 14.12

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
0 - 10	5
10 - 20	3
20 - 30	4
30 - 40	3
40 - 50	3
50 - 60	4
60 - 70	7
70 - 80	9
80 - 90	7
90 - 100	8

उपरोक्त सारणी से निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर देने का प्रयास करें।

कितने विद्यार्थियों ने 10 से कम अंक प्राप्त किए हैं? स्पष्टतया, उत्तर 5 है।

कितने विद्यार्थियों ने 20 से कम अंक प्राप्त किए हैं? ध्यान दीजिए कि 20 से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों में वे विद्यार्थी सम्मिलित हैं, जिन्होंने वर्ग 0 - 10 में अंक प्राप्त किए हैं और वे विद्यार्थी भी सम्मिलित हैं जिन्होंने वर्ग 10 - 20 में अंक प्राप्त किए हैं। अत:, 20

से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की कुल संख्या 5 + 3 अर्थात् 8 है। हम कहते हैं कि वर्ग 10 - 20 की *संचयी बारंबारता (cumulative frequency)* 8 है।

इसी प्रकार, हम अन्य वर्गों की संचयी बारंबारताएँ भी ज्ञात कर सकते हैं, अर्थात् हम यह ज्ञात कर सकते हैं कि 30 से कम अंक प्राप्त करने वाले कितने विद्यार्थी हैं, 40 से कम अंक प्राप्त करने वाले कितने विद्यार्थी हैं, ..., 100 से कम अंक प्राप्त करने वाले कितने विद्यार्थी हैं। हम इन्हें नीचे एक सारणी 14.13 के रूप में दे रहे हैं :

सारणी 14.13

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या (संचयी बारंबारता)
10 से कम	5
20 से कम	5 + 3 = 8
30 से कम	8 + 4 = 12
40 से कम	12 + 3 = 15
50 से कम	15 + 3 = 18
60 से कम	18 + 4 = 22
70 से कम	22 + 7 = 29
80 से कम	29 + 9 = 38
90 से कम	38 + 7 = 45
100 से कम	45 + 8 = 53

उपरोक्त बंटन से **कम प्रकार का संचयी बारंबारता बंटन** कहलाता है। यहाँ 10, 20, 30, . . . 100, संगत वर्ग अंतरालों की *उपरि सीमाएँ* हैं।

हम इसी प्रकार उन विद्यार्थियों की संख्याओं के लिए भी जिन्होंने 0 से अधिक या उसके बराबर अंक प्राप्त किए हैं, 10 से अधिक या उसके बराबर अंक प्राप्त किए हैं, 20 से अधिक या उसके बराबर अंक प्राप्त किए हैं, इत्यादि के लिए एक सारणी बना सकते हैं। सारणी 14.12 से हम देख सकते हैं कि सभी 53 विद्यार्थियों ने 0 से अधिक या 0 के बराबर अंक प्राप्त किए हैं। चूँकि अंतराल 0 - 10 में 5 विद्यार्थी हैं, इसलिए 53 – 5 = 48 विद्यार्थियों ने 10 से अधिक या उसके बराबर अंक प्राप्त किए हैं। इसी प्रक्रिया को जारी रखते हुए हम 20 से अधिक या उसके बराबर 48 – 3 = 45, 30 से अधिक या उसके बराबर 45 – 4 = 41, इत्यादि विद्यार्थी प्राप्त करते हैं, जिन्हें सारणी 14.14 में दर्शाया गया है।

सारणी 14.14

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या (संचयी बारंबारता)
0 से अधिक या उसके बराबर	53
10 से अधिक या उसके बराबर	53 – 5 = 48
20 से अधिक या उसके बराबर	48 – 3 = 45
30 से अधिक या उसके बराबर	45 – 4 = 41
40 से अधिक या उसके बराबर	41 – 3 = 38
50 से अधिक या उसके बराबर	38 – 3 = 35
60 से अधिक या उसके बराबर	35 – 4 = 31
70 से अधिक या उसके बराबर	31 – 7 = 24
80 से अधिक या उसके बराबर	24 – 9 = 15
90 से अधिक या उसके बराबर	15 – 7 = 8

उपरोक्त सारणी या बंटन **अधिक प्रकार का संचयी बारंबारता बंटन** कहलाता है। यहाँ 0, 10, 20, . . ., 90 संगत वर्ग अंतरालों की *निम्न सीमाएँ* हैं।

अब, वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक ज्ञात करने के लिए, हम उपरोक्त दोनों प्रकार के संचयी बारंबारता बंटनों में से किसी बंटन का प्रयोग कर सकते हैं।

हम सारणी 14.12 और सारणी 14.13 को मिलाकर एक नयी सारणी 14.15 बना लें जो नीचे दी गई है :

सारणी 14.15

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या (f)	संचयी बारंबारता (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	3	8
20 - 30	4	12
30 - 40	3	15
40 - 50	3	18
50 - 60	4	22
60 - 70	7	29
70 - 80	9	38
80 - 90	7	45
90 - 100	8	53

अब, वर्गीकृत आँकड़ों के सबसे मध्य के प्रेक्षण को हम केवल संचयी बारंबारताएँ देख कर ही नहीं ज्ञात कर सकते, क्योंकि सबसे मध्य का प्रेक्षण किसी अंतराल में होगा। अत:, यह आवश्यक है कि इस मध्य प्रेक्षण को उस वर्ग अंतराल में खोजा जाए, जो आँकड़ों को दो बराबर भागों में विभक्त करता है। परंतु यह वर्ग अंतराल कौन-सा है?

इस अंतराल को ज्ञात करने के लिए, हम सभी वर्गों की संचयी बारंबारताएँ और $\frac{n}{2}$ ज्ञात करते हैं। अब, हम वह वर्ग खोजते हैं जिसकी संचयी बारंबारता $\frac{n}{2}$ से अधिक और उसके निकटतम है। इस वर्ग को *माध्यक वर्ग* (*median class*) कहते हैं। उपरोक्त बंटन में, $n = 53$ है। अत:, $\frac{n}{2} = 26.5$ हुआ। अब, 60 - 70 ही वह वर्ग है जिसकी संचयी बारंबारता 29, $\frac{n}{2}$ अर्थात् 26.5 से अधिक और उसके निकटतम है।

अत:, 60 - 70 **माध्यक वर्ग** है।

माध्यक वर्ग ज्ञात करने के बाद, हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके माध्यक ज्ञात करते हैं :

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h,$$

जहाँ $l =$ माध्यक वर्ग की निम्न सीमा

$n =$ प्रेक्षणों की संख्या

$\text{cf} =$ माध्यक वर्ग से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारंबारता

$f =$ माध्यक वर्ग की बारंबारता

$h =$ वर्ग माप (यह मानते हुए कि वर्ग माप बराबर हैं)

अब $\frac{n}{2} = 26.5$, $l = 60$, $\text{cf} = 22$, $f = 7$, $h = 10$

को सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\text{माध्यक} = 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7}\right) \times 10 = 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

अत:, लगभग आधे विद्यार्थियों ने 66.4 से कम अंक प्राप्त किए हैं और शेष आधे विद्यार्थियों ने 66.4 से अधिक या उसके बराबर अंक प्राप्त किए हैं।

उदाहरण 7 : किसी स्कूल की कक्षा X की 51 लड़कियों की ऊँचाइयों का एक सर्वेक्षण किया गया और निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त किए गए :

ऊँचाई (cm में)	लड़कियों की संख्या
140 से कम	4
145 से कम	11
150 से कम	29
155 से कम	40
160 से कम	46
165 से कम	51

माध्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : माध्यक ऊँचाई ज्ञात करने के लिए, हमें वर्ग अंतराल और उनकी बारंबारताओं की आवश्यकता है।

चूँकि दिया हुआ बंटन **कम प्रकार का** है, इसलिए हमें वर्ग अंतरालों की उपरि सीमाएँ 140, 145, 150, . . ., 165 प्राप्त होती हैं तथा इनके संगत वर्ग अंतराल क्रमश: 140 से कम, 140-145, 145-150,.....160-165 हैं। दिए हुए बंटन से, हम देखते हैं कि ऐसी 4 लड़कियाँ हैं जिनकी ऊँचाई 140 से कम है, अर्थात् वर्ग अंतराल 140 से कम की बारंबारता 4 है। अब 145 cm से कम ऊँचाई वाली 11 लड़कियाँ हैं और 140 cm से कम ऊँचाई वाली 4 लड़कियाँ हैं। अत:, अंतराल 140 - 145 में ऊँचाई रखने वाली लड़कियों की संख्या $11 - 4 = 7$ होगी। अर्थात् वर्ग अंतराल 140 - 145 की बारंबारता 7 है। इसी प्रकार, 145 – 150 की बारंबारता $29 - 11 = 18$ है, 150 - 155 की बारंबारता $40 - 29 = 11$ है, इत्यादि। अत: संचयी बारंबारताओं के साथ हमारी बारंबारता बंटन सारणी निम्नलिखित रूप की हो जाती है :

सारणी 14.16

वर्ग अंतराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
140 से कम	4	4
140 - 145	7	11
145 - 150	18	29
150 - 155	11	40
155 - 160	6	46
160 - 165	5	51

अब $n = 51$ है। अतः, $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ है। यह प्रेक्षण अंतराल 145 - 150 में आता है। तब,

l (निम्न सीमा) = 145,

माध्यक वर्ग 145 - 150 के ठीक पहले वर्ग की संचयी बारंबारता (cf) = 11,

माध्यक वर्ग 145 – 150 की बारंबारता $f = 18$ तथा वर्ग माप $h = 5$ है।

सूत्र, माध्यक = $l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h$ का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\text{माध्यक} = 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18}\right) \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

अतः, लड़कियों की माध्यक ऊँचाई 149.03 cm है।

इसका अर्थ है कि लगभग 50% लड़कियों की ऊँचाइयाँ 149.03 cm से कम या उसके बराबर है तथा शेष 50% की ऊँचाइयाँ 149.03 cm से अधिक है।

उदाहरण 8 : निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक 525 है। यदि बारंबारताओं का योग 100 है, तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	बारंबारता
0 - 100	2
100 - 200	5
200 -300	x
300 - 400	12
400 - 500	17
500 - 600	20
600 - 700	y
700 - 800	9
800 - 900	7
900 - 1000	4

हल :

वर्ग अंतराल	बारंबारता	संचयी बारंबारता
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	$7 + x$
300 - 400	12	$19 + x$
400 - 500	17	$36 + x$
500 - 600	20	$56 + x$
600 - 700	y	$56 + x + y$
700 - 800	9	$65 + x + y$
800 - 900	7	$72 + x + y$
900 - 1000	4	$76 + x + y$

यह दिया है कि $n = 100$ है।

अत:, $76 + x + y = 100$ अर्थात् $x + y = 24$ (1)

माध्यक 525 है, जो वर्ग 500–600 में स्थित है।

अत:, $l = 500$, $f = 20$, $\text{cf} = 36 + x$, $h = 100$ है।

सूत्र माध्यक $= l + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right)h$, का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20}\right) \times 100$$

या $$525 - 500 = (14 - x) \times 5$$

या $$25 = 70 - 5x$$

या $$5x = 70 - 25 = 45$$

अत: $$x = 9$$

इसलिए (1) से हमें प्राप्त होता है कि $9 + y = 24$

अर्थात् $y = 15$

अब जब हमने तीनों केंद्रीय प्रवृत्ति के मापकों का अध्ययन कर लिया है, तो आइए इस बात की चर्चा करें कि एक *विशिष्ट आवश्यकता के लिए, कौन-सा मापक अधिक उपयुक्त रहेगा।*

केंद्रीय प्रवृत्ति का अधिकतर प्रयोग होने वाला मापक माध्य है, क्योंकि यह सभी प्रेक्षणों पर आधारित होता है तथा दोनों चरम मानों के बीच में स्थित होता है। अर्थात्, यह संपूर्ण आँकड़ों में सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के बीच में स्थित होता है। यह हमें दो या अधिक दिए हुए बंटनों की तुलना करने में भी सहायक है। उदाहरणार्थ, किसी परीक्षा में, विभिन्न स्कूलों के विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों के औसत (माध्य) की तुलना करके हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किस स्कूल का प्रदर्शन बेहतर रहा।

परंतु आँकड़ों के चरम मान माध्य पर प्रभाव डालते हैं। उदाहरणार्थ, लगभग एक-सी बारंबारताओं वाले वर्गों का माध्य दिए हुए आँकड़ों का एक अच्छा प्रतिनिधि होगा। परंतु यदि एक वर्ग की बारंबारता मान लीजिए 2 हो और शेष पाँच वर्गों की बारंबारताएँ 20, 25, 20, 21 और 18 हों, तो इनका माध्य आँकड़ों का सही प्रतिबिंब प्रदान नहीं करेगा। अतः ऐसी स्थितियों के लिए, माध्य आँकड़ों का एक अच्छा प्रतिनिधित्व नहीं करेगा।

उन समस्याओं में, जहाँ व्यक्तिगत प्रेक्षण महत्वपूर्ण नहीं होते और हम एक 'प्रतीकात्मक' (typical) प्रेक्षण ज्ञात करना चाहते हैं, तो माध्यक अधिक उपयुक्त रहता है। उदाहरणार्थ, किसी राष्ट्र के श्रमिकों की प्रतीकात्मक उत्पादकता दर, औसत मज़दूरी, इत्यादि के लिए माध्यक एक उपयुक्त मापक रहता है। ये ऐसी स्थितियाँ हैं जिनमें चरम (अर्थात् बहुत बड़े या बहुत छोटे) मान संबद्ध हो सकते हैं। अतः, इन स्थितियों में, हम माध्य के स्थान पर, केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक माध्यक लेते हैं।

ऐसी स्थितियों में, जहाँ अधिकतर आने वाला मान स्थापित करना हो या सबसे अधिक लोकप्रिय वस्तु का पता करना हो, तो बहुलक सबसे अधिक अच्छा विकल्प होता है। उदाहरणार्थ, सबसे अधिक देखे जाने वाला लोकप्रिय टीवी प्रोग्राम ज्ञात करने, उस उपभोक्ता वस्तु को ज्ञात करने, जिसकी माँग सबसे अधिक है, लोगों द्वारा वाहनों का सबसे अधिक पसंद किए जाने वाला रंग ज्ञात करने, इत्यादि में बहुलक उपयुक्त मापक है।

टिप्पणियाँ :

1. इन तीनों केंद्रीय प्रवृत्ति के मापकों में एक संबंध है, जो निम्नलिखित है:

3 माध्यक = बहुलक + 2 माध्य

2. असमान वर्गमापों वाले वर्गीकृत आँकड़ों के माध्यक भी परिकलित किए जा सकते हैं। परंतु यहाँ हम इनकी चर्चा नहीं करेंगे।

प्रश्नावली 14.3

1. निम्नलिखित बारंबारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली की मासिक खपत दर्शाता है। इन आँकड़ों के माध्यक, माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए। इनकी तुलना कीजिए।

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या
65 - 85	4
85 - 105	5
105 - 125	13
125 - 145	20
145 - 165	14
165 - 185	8
185 - 205	4

2. यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो तो x और y के मान ज्ञात कीजिए :

वर्ग अंतराल	बारंबारता
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
योग	60

3. एक जीवन बीमा एजेंट 100 पॉलिसी धारकों की आयु के बंटन के निम्नलिखित आँकड़े ज्ञात करता है। माध्यक आयु परिकलित कीजिए, यदि पॉलिसी केवल उन्हीं व्यक्तियों को दी जाती है, जिनकी आयु 18 वर्ष या उससे अधिक हो, परंतु 60 वर्ष से कम हो।

आयु (वर्षों में)	पॉलिसी धारकों की संख्या
20 से कम	2
25 से कम	6
30 से कम	24
35 से कम	45
40 से कम	78
45 से कम	89
50 से कम	92
55 से कम	98
60 से कम	100

4. एक पौधे की 40 पत्तियों की लंबाइयाँ निकटतम मिलीमीटरों में मापी जाती है तथा प्राप्त आँकड़ों को निम्नलिखित सारणी के रूप में निरूपित किया जाता है :

लंबाई (mm में)	पत्तियों की संख्या
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

पत्तियों की माध्यक लंबाई ज्ञात कीजिए।

संकेत : माध्यक ज्ञात करने के लिए, आँकड़ों को सतत वर्ग अंतरालों में बदलना पड़ेगा, क्योंकि सूत्र में वर्ग अंतरालों को सतत माना गया है। तब ये वर्ग 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, . . ., 171.5 - 180.5 में बदल जाते हैं।

5. निम्नलिखित सारणी 400 नियॉन लैंपों के जीवन कालों (life time) को प्रदर्शित करती है :

जीवन काल (घंटों में)	लैंपों की संख्या
1500 - 2000	14
2000 - 2500	56
2500 - 3000	60
3000 - 3500	86
3500 - 4000	74
4000 - 4500	62
4500 - 5000	48

एक लैंप का माध्यक जीवन काल ज्ञात कीजिए।

6. एक स्थानीय टेलीफ़ोन निर्देशिका से 100 कुलनाम (surnames) लिए गए और उनमें प्रयुक्त अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्नलिखित बारंबारता बंटन प्राप्त हुआ :

अक्षरों की संख्या	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 29
कुलनामों की संख्या	6	30	40	16	4	4

कुलनामों में माध्यक अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। कुलनामों में माध्य अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। साथ ही, कुलनामों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

7. नीचे दिया हुआ बंटन एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों के भार दर्शा रहा है। विद्यार्थियों का माध्यक भार ज्ञात कीजिए।

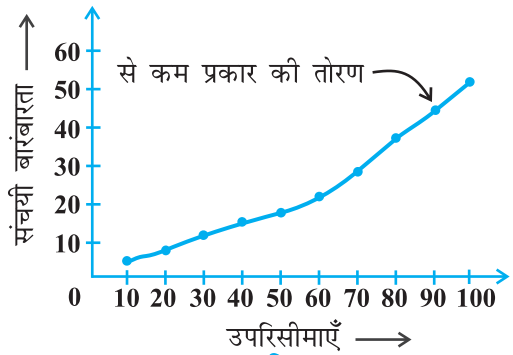
भार (किलोग्राम में)	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	8	6	6	3	2

14.5 संचयी बारंबारता बंटन का आलेखीय निरूपण

जैसाकि हम सभी जानते हैं कि चित्र, अक्षरों से अधिक अच्छी भाषा बोलते हैं। एक आलेखीय निरूपण हमें एक ही दृष्टि में उनसे संबंधित आँकड़ों को समझने में सहायक सिद्ध होता है। कक्षा IX में, हमने दिए हुए आँकड़ों को दंड आलेखों, आयतचित्रों और बारंबारता बहुभुजों की सहायता से निरूपित किया था। आइए अब एक संचयी बारंबारता बंटन को आलेखीय रूप से निरूपित करें।

उदाहरण के लिए, आइए सारणी 14.13 में दिए संचयी बारंबारता बंटन पर विचार करें।

याद कीजिए कि मान 10, 20, 30, ..., 100 संगत वर्ग अंतरालों की उपरि सीमाएँ हैं। सारणी में दिए आँकड़ों को आलेखीय रूप से निरूपित करने के लिए, हम क्षैतिज अक्ष (x-अक्ष) पर वर्ग अंतरालों की उपरि सीमाएँ एक सुविधाजनक पैमाना (scale) लेकर अंकित करते हैं तथा ऊर्ध्वाधर अक्ष (y-अक्ष) पर वही या कोई अन्य पैमाना लेकर संचयी बारंबारताएँ अंकित करते हैं। अर्थात् दोनों अक्षों पर एक ही पैमाना चुनना आवश्यक नहीं है। आइए अब एक ग्राफ पेपर पर (उपरि सीमा, संगत संचयी बारंबारता) से प्राप्त क्रमित युग्मों (ordered pairs) के संगत बिंदु (10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) आलेखित करें तथा इन बिंदुओं का एक मुक्त मृदु हस्त वक्र (free hand smooth curve) द्वारा मिलाएँ। यह प्राप्त हुई वक्र से कम प्रकार की एक *संचयी बारंबारता वक्र (cumulative frequency curve)* या *तोरण (ogive)* कहलाती है (देखिए आकृति 14.1)।

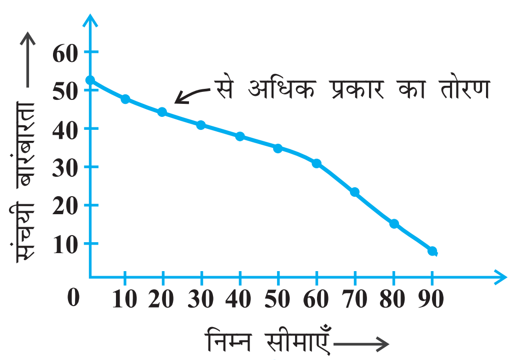


आकृति 14.1

> अंग्रेज़ी के शब्द 'ogive' को 'ogeev' (ओजीव) बोला जाता है, जिसकी व्युत्पत्ति शब्द 'ogee' से हुई है। यह एक उत्तल वक्र (convex curve) के रूप में लहराती हुई एक अवतल वक्र (concave curve) के आकार की वक्र होती है। अर्थात् यह वक्र S के आकार की होती है जिसके सिरे ऊर्ध्वाधर रहते हैं। 14वीं और 15वीं शताब्दियों की गॉथिक ढंग (Gothic style) की वास्तुकला में, ogee आकार का वक्र उस कला की प्रमुख विशेषताओं में से एक है।

अब, हम पुनः सारणी 14.14 में दिए हुए (से अधिक प्रकार के) संचयी बारंबारता बंटन पर विचार करते हैं और उसका तोरण खींचते हैं।

याद कीजिए कि यहाँ 0, 10, 20, ...90 क्रमशः संगत वर्ग अंतरालों 0 - 10, 10 - 20, ..., 90 - 100 की निम्न सीमाएँ हैं। 'से अधिक प्रकार' के आलेखीय निरूपण के लिए, हम उपयुक्त पैमाना लेते हुए, एक ग्राफ पेपर पर क्षैतिज अक्ष पर निम्न सीमाएँ तथा ऊर्ध्वाधर अक्ष पर संचयी बारंबारताएँ अंकित करते हैं। इसके बाद, हम (निम्न सीमा, संगत संचयी बारंबारता) के अनुसार बिंदु (0, 53), (10, 48), (20, 45), (30, 41), (40, 38),



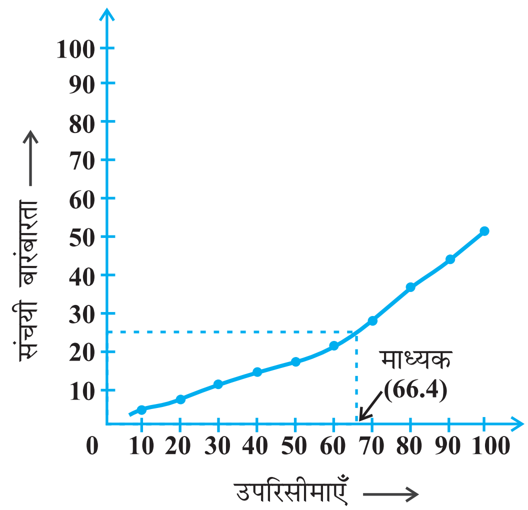
आकृति 14.2

(50, 35), (60, 31) (70, 24), (80, 15), (90, 8), आलेखित करते हैं। फिर हम बिंदुओं को एक मुक्त हस्त मृदु वक्र द्वारा मिलाते हैं। अब जो हमें वक्र प्राप्त होती है वह *'से अधिक प्रकार'* की *एक संचयी बारंबारता वक्र* या *तोरण* कहलाती है (देखिए आकृति 14.2)।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि दोनों तोरण (आकृति 14.1 और आकृति 14.2 वाले) समान आँकड़ों के संगत हैं, जो सारणी 14.12 में दिए हैं।

अब प्रश्न उठता है कि क्या तोरण किसी रूप में माध्यक से संबंधित है? क्या सारणी 14.12 के आँकड़ों के संगत खींची गई इन दोनों संचयी बारंबारता वक्रों से हम आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कर सकते हैं? आइए इसकी जाँच करें।

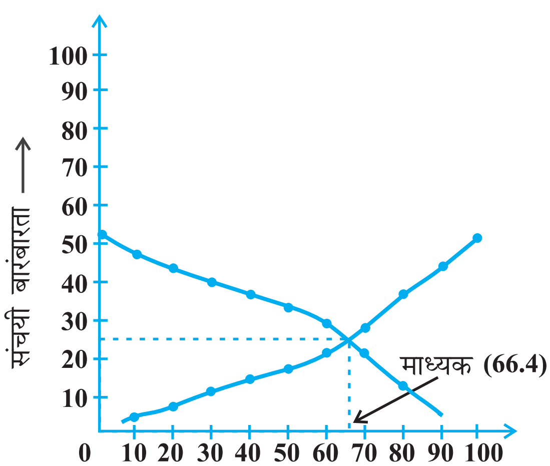
एक स्पष्ट विधि यह है कि ऊर्ध्वाधर अक्ष पर, $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$ की स्थिति ज्ञात करें (देखिए आकृति 14.3)। इस बिंदु (स्थिति) से होकर, क्षैतिज अक्ष के समांतर एक रेखा खींचिए जो उपरोक्त वक्र को एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है। इस बिंदु से, क्षैतिज अक्ष पर लंब डालिए। क्षैतिज अक्ष और इस लंब के प्रतिच्छेद बिंदु से ही माध्यक निर्धारित हो जाता है (देखिए आकृति 14.3)।



आकृति 14.3

माध्यक ज्ञात करने की एक अन्य विधि निम्नलिखित है :

एक ही अक्षों पर दोनों प्रकार के (अर्थात् से कम प्रकार के और से अधिक प्रकार के) तोरण खींचिए। दोनों तोरण एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं। इस बिंदु से, हम क्षैतिज अक्ष पर लंब खींचते हैं। यह लंब क्षैतिज अक्ष को जहाँ काटता है, वही आँकड़ों का माध्यक है (देखिए आकृति 14.4)।



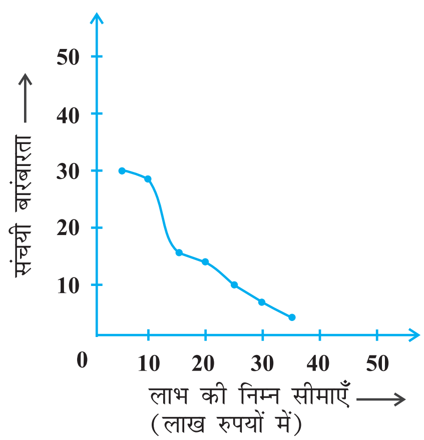
आकृति 14.4

उदाहरण 9 : किसी मोहल्ले के एक शॉपिंग कांप्लेक्स (shopping complex) की 30 दुकानों द्वारा अर्जित किए गए वार्षिक लाभों से निम्नलिखित बारंबारता बंटन प्राप्त होता है :

लाभ (लाख रुपयों में)	दुकानों की संख्या
5 से अधिक या उसके बराबर	30
10 से अधिक या उसके बराबर	28
15 से अधिक या उसके बराबर	16
20 से अधिक या उसके बराबर	14
25 से अधिक या उसके बराबर	10
30 से अधिक या उसके बराबर	7
35 से अधिक या उसके बराबर	3

उपरोक्त आँकड़ों के लिए एक ही अक्षों पर दोनों तोरण खींचिए। इसके बाद, माध्यक लाभ ज्ञात कीजिए।

हल : पहले हम ग्राफ पेपर पर क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर अक्ष खींचते हैं, जिनमें लाभ के अंतरालों की निम्न सीमाएँ क्षैतिज अक्ष के अनुदिश लेते हैं और संचयी बारंबारताओं का ऊर्ध्वाधर अक्ष के अनुदिश लेते हैं। फिर हम बिंदुओं (5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7) और (35, 3) को आलेखित करके एक मुक्त हस्त वक्र से मिला देते हैं। इससे हमें 'से अधिक के प्रकार का' तोरण प्राप्त हो जाता है, जैसाकि आकृति 14.5 में दर्शाया गया है।



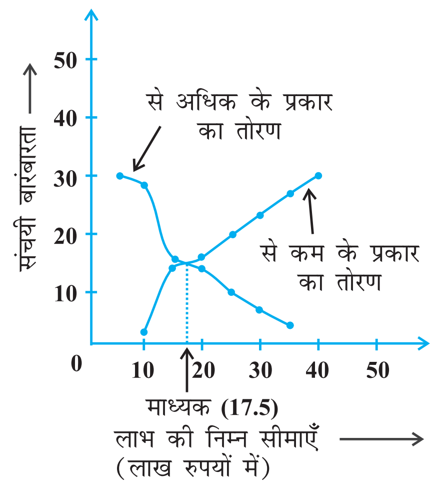
आकृति 14.5

अब आइए उपरोक्त सारणी से, वर्ग अंतराल, संगत बारंबारताएँ और संचयी बारंबारताएँ प्राप्त करें।

सारणी 14.17

वर्ग अंतराल	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
दुकानों की संख्या	2	12	2	4	3	4	3
संचयी बारंबारता	2	14	16	20	23	27	30

इन मानों का प्रयोग करके हम (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) को आकृति 14.5 वाले आलेख में आलेखित करते हैं। फिर इनको एक मुक्त हस्त वक्र द्वारा मिलाकर 'से कम के प्रकार का' तोरण प्राप्त करते हैं, जैसाकि आकृति 14.6 में दर्शाया गया है। इनके प्रतिच्छेद बिंदु से क्षैतिज अक्ष पर लंब डालने पर जो क्षैतिज अक्ष और लंब का प्रतिच्छेद बिंदु है, उसी के संगत मान से माध्यक प्राप्त होता है। यह माध्यक 17.5 लाख रुपये है।



आकृति 14.6

टिप्पणी : उपरोक्त उदाहरण में, वर्ग अंतराल सतत (continuous) थे। तोरण खींचने से पहले यह सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि वर्ग अंतराल सतत हों। (कक्षा IX में दी आयत चित्रों की रचनाएँ भी देखिए।)

प्रश्नावली 14.4

1. निम्नलिखित बंटन किसी फैक्ट्री के 50 श्रमिकों की दैनिक आय दर्शाता है :

दैनिक आय (रुपयों में)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

'उपरोक्त बंटन को एक कम प्रकार' के संचयी बारंबारता बंटन में बदलिए और उसका तोरण खींचिए।

2. किसी कक्षा के 35 विद्यार्थियों की मेडिकल जाँच के समय, उनके भार निम्नलिखित रूप में रिकॉर्ड किए गए :

भार (कि.ग्रा. में)	विद्यार्थियों की संख्या
38 से कम	0
40 से कम	3
42 से कम	5
44 से कम	9
46 से कम	14
48 से कम	28
50 से कम	32
52 से कम	35

उपरोक्त आँकड़ों के 'लिए कम प्रकार का तोरण' खींचिए। इसके बाद माध्यक भार ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित सारणी किसी गाँव के 100 फार्मों में हुआ प्रति हेक्टेयर (ha) गेहूँ का उत्पादन दर्शाते हैं :

उत्पादन (kg/ha)	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80
फार्मों की संख्या	2	8	12	24	38	16

इस बंटन को 'अधिक के प्रकार के' बंटन में बदलिए और फिर उसका तोरण खींचिए।

14.6 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित बिंदुओं का अध्ययन किया है :

1. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य निम्नलिखित प्रकार ज्ञात किया जा सकता है :

(i) प्रत्यक्ष विधि: $\overline{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

(ii) कल्पित माध्य विधि $\overline{x} = a + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

(iii) पग-विचलन विधि: $\overline{x} = a + \left(\dfrac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h$

इनमें यह मान लिया जाता है कि प्रत्येक वर्ग की बारंबारता उसके मध्य-बिंदु, अर्थात् वर्ग चिह्न पर केंद्रित है।

2. वर्गीकृत आँकड़ों का बहुलक निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है :

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

जहाँ संकेत अपना स्वाभाविक अर्थ रखते हैं।

3. किसी बारंबारता बंटन में किसी वर्ग की संचयी बारंबारता उस वर्ग से पहले वाले सभी वर्गों की बारंबारताओं का योग होता है।

4. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है :

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h$$

जहाँ संकेत अपना स्वाभाविक अर्थ रखते हैं।

5. संचयी बारंबारता बंटनों को आलेखीय रूप से संचयी बारंबारता वक्रों या 'से कम प्रकार के' या 'से अधिक प्रकार के' तोरण द्वारा निरूपण।

6. वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक इनके दोनों प्रकार के तोरणों के प्रतिच्छेद बिंदु से क्षैतिज अक्ष पर लंब डालकर लंब और क्षैतिज अक्ष के प्रतिच्छेद बिंदु के संगत मान से प्राप्त हो जाता है।

पाठकों के लिए विशेष

वर्गीकृत आँकड़ों के बहुलक और माध्यक का परिकलन करने के लिए, सूत्र का प्रयोग करने से पहले यह सुनिश्चित किया जाना चाहिए कि वर्ग अंतराल सतत हैं। इसी प्रकार का प्रतिबंध का प्रयोग तोरण की संरचना के लिए भी करते हैं। अग्रत:, तोरण की स्थिति में प्रयुक्त पैमाना दोनों अक्षों पर समान नहीं भी हो सकता है।

प्रायिकता (Probability) 15

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance

(प्रायिकताओं के सिद्धांत और त्रुटियों के सिद्धांत अब अति गणितीय रुचि का तथा अति व्यावहारिक महत्व का एक विशाल समूह स्थापित करते हैं।)

– R.S. Woodward

15.1 भूमिका

कक्षा IX में, आप घटनाओं की प्रायोगिक (experimental) [या आनुभविक (empirical)] प्रायिकताओं के बारे में अध्ययन कर चुके हैं, जो वास्तविक प्रयोगों के परिणामों पर आधारित थीं। हमने एक सिक्के को 1000 बार उछालने के प्रयोग की चर्चा की थी, जिसमें परिणामों (outcomes) की बारंबारताएँ इस प्रकार थीं :

चित (Head) : 455 पट (Tail) : 545

इस प्रयोग पर आधारित, एक चित की आनुभविक प्रायिकता $\frac{455}{1000}$, अर्थात् 0.455 है तथा एक पट की आनुभविक प्रायिकता 0.545 है। (कक्षा IX की गणित की पाठ्यपुस्तक के अध्याय 15 का उदाहरण 1 भी देखिए।) ध्यान दीजिए कि ये प्रायिकताएँ एक सिक्के को 1000 बार उछालने के एक वास्तविक प्रयोग के परिणामों पर आधारित हैं। इसी कारण, ये *आनुभविक* या *प्रायोगिक प्रायिकताएँ* कहलाती हैं। वस्तुतः, प्रायोगिक प्रायिकताएँ वास्तविक प्रयोगों के परिणामों तथा घटनाएँ घटित होने की पर्याप्त रिकॉर्डिंग (recording) पर निर्भर करती हैं। इसके अतिरिक्त, ये प्रायिकताएँ केवल 'आकलन' (estimates) ही हैं। यदि हम इसी प्रयोग को

अन्य 1000 बार सिक्के को उछाल कर करें, तो हमें इनसे भिन्न आँकड़े प्राप्त हो सकते हैं, जिससे हमें पहले से भिन्न प्रायिकता आकलन प्राप्त होंगे।

कक्षा IX में, आपने एक सिक्के को अनेक बार उछाला था और यह नोट किया था कि चित (या पट) कितनी बार आया (कक्षा IX के अध्याय 15 के क्रियाकलापों 1 और 2 को देखिए)। आपने यह भी देखा था कि जैसे-जैसे सिक्का उछालने की संख्या बढ़ती गई, वैसे-वैसे एक चित (या पट) आने की प्रायोगिक प्रायिकता संख्या $\frac{1}{2}$ के निकटतम आती रही। आपने ही नहीं, अपितु विश्व के विभिन्न भागों के व्यक्तियों ने इसी प्रकार के प्रयोग किए हैं और चित आने की संख्या को रिकॉर्ड किया है।

उदाहरणार्थ, अठारहवीं शताब्दी के फ्रांसीसी जीवविज्ञानी कोमटे डि बुफॉन (Comte De Buffon) ने एक सिक्के को 4040 बार उछाला और 2048 चित प्राप्त किए। इस स्थिति में, एक चित आने की प्रायिकता $\frac{2048}{4040}$ अर्थात् 0.507 थी। ब्रिटेन के जे.ई. कैरिच (J.E. Kerrich) ने एक सिक्के की 10000 उछालों में 5067 चित प्राप्त किए। इस स्थिति में, एक चित आने की प्रायोगिक प्रायिकता $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ थी। सांख्यिकीविद कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) ने इसमें अधिक समय व्यतीत करके एक सिक्के को 24000 बार उछाला। उसने 12012 चित प्राप्त किए तथा इस प्रकार उसे एक चित के आने की प्रायोगिक प्रायिकता 0.5005 प्राप्त हुई।

अब, मान लीजिए कि हम प्रश्न करते हैं, यदि सिक्का उछालने के प्रयोग को मान लीजिए एक मिलियन बार किया जाए, तो चित आने की प्रायोगिक प्रायिकता क्या होगी? यदि प्रयोग 10 मिलियन बार किया जाए, तो प्रायिकता क्या होगी? आप सहज ज्ञान से यह अनुभव करेंगे कि जैसे-जैसे सिक्के उछालने की संख्या बढ़ती जाती है, वैसे-वैसे चित (या पट) आने की प्रायोगिक प्रायिकता एक संख्या 0.5, अर्थात् $\frac{1}{2}$ के आसपास प्रतीत होती है। हम इसे चित (पट) पाने की *सैद्धांतिक प्रायिकता (theoretical probability)* कहते हैं, इसे आप अगले अनुच्छेद में देखेंगे। इस अध्याय में हम एक घटना की सैद्धांतिक प्रायिकता [जिसे पारंपरिक प्रायिकता (classical probability) भी कहते हैं] का परिचय कराएँगे तथा इस अवधारणा पर आधारित सरल समस्याओं की चर्चा करेंगे।

15.2 प्रायिकता — एक सैद्धांतिक दृष्टिकोण

आइए निम्नलिखित स्थिति पर विचार करें:

मान लीजिए एक सिक्के को यादृच्छया (Random) उछाला जाता है।

> जब हम एक सिक्के की बात करते हैं, तब हम यह कल्पना करते हैं कि वह न्यायसंगत (fair) है। अर्थात् वह सममित (symmetrical) है, ताकि कोई कारण न हो कि वह एक ही ओर, दूसरी ओर की अपेक्षा, अधिक गिरे। हम सिक्के के इस गुण को उसका *अपक्षपातपूर्ण (unbiased)* होना कहते हैं। 'यादृच्छया उछाल' (random toss) से हमारा तात्पर्य है कि सिक्के को बिना किसी *पक्षपात (bias)* या *रुकावट* के स्वतंत्रतापूर्वक गिरने दिया जाता है।

हम पहले से जानते हैं कि सिक्का दो संभव विधियों में से केवल एक ही विधि से गिर सकता है – या तो चित ऊपर होगा या फिर पट ऊपर होगा [हम सिक्के के, उसके किनारे (edge) के अनुदिश गिरने की संभावना को अस्वीकार करते हैं, जो उदाहरणार्थ, तब संभव है जब सिक्का रेत पर गिरे]। हम यह तर्कसंगतरूप से मान सकते हैं कि प्रत्येक *परिणाम,* चित या पट, *का प्रकट होना उतनी ही बार हो सकता है जितना कि अन्य परिणाम* का। दूसरे शब्दों में हम कहते हैं कि *परिणाम* चित और पट *समप्रायिक (equally likely)* हैं। समप्रायिक परिणामों के एक अन्य उदाहरण के लिए मान लीजिए कि हम एक पासे को फेंकते हैं। हमारे लिए, एक पासे का अर्थ सदैव एक न्यायसंगत पासे से होगा। संभव परिणाम क्या है? ये 1, 2, 3, 4, 5, 6 हैं। प्रत्येक संख्या के ऊपर आने की समान संभावना है। अतः, पासे को फेंकने से प्राप्त होने वाले समप्रायिक परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं।

क्या प्रत्येक प्रयोग के परिणाम समप्रायिक होते हैं? आइए देखें।

मान लीजिए एक थैले में 4 लाल गेंदें और 1 नीली गेंद है तथा आप इस थैले में से, बिना थैले के अंदर कुछ देखें, एक गेंद निकालते हैं। इसके क्या परिणाम हैं? क्या एक लाल गेंद और एक नीली गेंद के परिणाम समप्रायिक हैं? चूँकि यहाँ 4 लाल गेंदें हैं और नीली गेंद केवल एक ही, अतः आप यह अवश्य स्वीकार करेंगे कि आपके द्वारा एक नीली गेंद की अपेक्षा एक लाल गेंद निकालने की संभावना अधिक है। अतः ये परिणाम (एक लाल गेंद और एक नीली गेंद) समप्रायिक *नहीं* हैं। परंतु थैले में से किसी भी रंग की गेंद निकालने के परिणाम समप्रायिक हैं।

अतः, सभी प्रयोगों के परिणामों का समप्रायिक होना आवश्यक नहीं है। परंतु, इस

अध्याय में, हम आगे यह मानकर चलेंगे कि **सभी प्रयोगों के परिणाम समप्रायिक हैं।**

कक्षा IX में, हमने एक घटना E की **प्रयोगात्मक या आनुभविक** प्रायिकता P(E) को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया था :

$$\text{P(E)} = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें घटना घटित हुई है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

प्रायिकता की आनुभविक व्याख्या का बड़ी संख्या में दोहराए जा सकने वाले किसी भी प्रयोग से जुड़े प्रत्येक घटना के लिए अनुप्रयोग किया जा सकता है। किसी प्रयोग को दोहराने की आवश्यकता एक गंभीर परिसीमा है, क्योंकि अनेक स्थितियों में यह अधिक व्यय वाला हो सकता है या यह भी हो सकता है कि ऐसा करना संभव ही न हो। निस्संदेह, सिक्का उछालने या पासा फेंकने के प्रयोगों में, इसमें कोई कठिनाई नहीं हुई। परंतु एक उपग्रह (satellite) छोड़ने के प्रयोग को यह परिकलित करने के लिए बार-बार दोहराने की छोड़ते समय उसकी असफलता की आनुभवित प्रायिकता क्या है, के बारे में आप क्या सोचते हैं अथवा यह कि एक भूकंप के कारण कोई बहुमंजिली इमारत नष्ट होगी या नहीं, की आनुभविक प्रायिकता परिकलित करने के लिए भूकंप की परिघटना के दोबारा घटित होने के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

ऐसे प्रयोगों में, जहाँ हम कुछ कल्पनाओं को सही मानने को तैयार हो जाएँ, हम एक प्रयोग के दोहराने से बच सकते हैं, क्योंकि वे कल्पनाएँ सीधे सही (सैद्धांतिक) प्रायिकता परिकलित करने में हमारी सहायता करती हैं। परिणामों के समप्रायिक होने की कल्पना (जो अनेक प्रयोगों में मान्य होती है, जैसे कि ऊपर सिक्का उछालने और पासा फेंकने के दोनों उदाहरणों में है) इन कल्पनाओं में से एक है जो हमें किसी घटना की प्रायिकता की निम्नलिखित परिभाषा की ओर अग्रसर करती है।

किसी घटना E की ***सैद्धांतिक प्रायिकता (theoretical probability)*** [जिसे **परंपरागत प्रायिकता (classical probability)** भी कहा जाता है।] P(E) निम्नलिखित रूप में परिभाषित की जाती है

$$\mathbf{P(E)} = \frac{\textbf{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\textbf{प्रयोग के सभी संभव परिणामों की संख्या}}$$

यहाँ हम यह कल्पना करते हैं कि प्रयोग के परिणाम समप्रायिक हैं।

हम संक्षिप्त रूप में, सैद्धांतिक प्रायिकता को केवल प्रायिकता ही कहेंगे।

प्रायिकता की उपरोक्त परिभाषा 1795 में पियरे-साइमन लाप्लास (Pierre- Simon Laplace) ने दी थी।

प्रायिकता सिद्धांत का सूत्रपात 16वीं शताब्दी में हुआ, जब एक इतालवी भौतिकशास्त्री एवं गणितज्ञ जे. कार्डन ने इस विषय पर पहली पुस्तक लिखी, जिसका नाम था : **The Book on Games of Chance** अपने प्रादुर्भाव से ही, प्रायिकता के अध्ययन को महान गणितज्ञों का ध्यान अपनी ओर आकर्षित किया। इन गणितज्ञों में जेम्स बर्नूली (1654–1705), ए.ड़ी मोइवरे (1667–1754) और पियरे–साइमन लाप्लास ऐसे लोग हैं जिन्होंने इस क्षेत्र में एक सार्थक योगदान दिया। लाप्लास द्वारा 1812 में लिखी गई कृति *(Theorie Analytiquedes Probabilities)* को एक अकेले व्यक्ति द्वारा प्रायिकता के सिद्धांत के लिए किया गया सबसे बड़ा योगदान माना जाता है। हाल ही के कुछ वर्षों में, प्रायिकता का अनेक क्षेत्रों, जैसे कि जैविकी, अर्थशास्त्र, वंश संबंधी शास्त्र (genetics), भौतिकी, समाजशास्त्र इत्यादि क्षेत्रों में प्रचुर मात्रा में उपयोग किया जा रहा है।

पियरे–साइमन लाप्लास
(1749 – 1827)

आइए ऐसे प्रयोगों से संबंधित कुछ घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करें, जिनमें समप्रायिक (equally likely) होने की कल्पना मान्य है।

उदाहरण 1 : एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जब एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है। साथ ही, एक पट प्राप्त करने की भी प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : एक सिक्के को एक बार उछालने के प्रयोग में, संभव परिणामों की संख्या 2 है– चित (H) और पट (T)। मान लीजिए घटना E 'चित प्राप्त करना' है। तब, E के अनुकूल (अर्थात् चित प्राप्त करने के अनुकूल) परिणाम 1 है। अतः,

$$P(E) = P\,(\text{चित}) = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{2}$$

इसी प्रकार, यदि घटना F पट प्राप्त करना है, तो

$$P(F) = P(\text{पट}) = \frac{1}{2} \quad (\text{क्यों?})$$

उदाहरण 2 : एक थैले में एक लाल गेंद, एक नीली गेंद और एक पीली गेंद है तथा सभी गेंदे एक ही साइज की हैं। कृतिका बिना थैले के अंदर झाँके, इसमें से एक गेंद निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गेंद

(i) पीली होगी? (ii) लाल होगी? (iii) नीली होगी?

हल : कृतिका थैले में से, उसमें बिना झाँके, गेंद निकालती है। अतः, उसके द्वारा कोई भी गेंद निकालना समप्रायिक है।

माना 'पीली गेंद निकालना' घटना Y है, 'लाल गेंद निकालना' घटना R है तथा 'नीली गेंद निकालना' घटना B है।

अब, सभी संभव परिणामों की संख्या = 3 है।

(i) घटना Y के अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

अतः $$P(Y) = \frac{1}{3}$$

इसी प्रकार, $P(R) = \frac{1}{3}$ और $P(B) = \frac{1}{3}$

टिप्पणी :

(1) किसी प्रयोग की वह घटना जिसका केवल एक ही परिणाम हो ***प्रारंभिक घटना*** *(elementary event)* कहलाती है। उदाहरण 1 में दोनों घटनाएँ E और F प्रारंभिक घटनाएँ हैं। इसी प्रकार, उदाहरण 2 में, घटना Y, R और B में प्रत्येक एक प्रारंभिक घटना है।

(2) उदाहरण 1 में, हम देखते हैं कि $P(E) + P(F) = 1$

उदाहरण 2 में, हम देखते हैं कि $P(Y) + P(B) + P(R) = 1$

ध्यान दीजिए कि **किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग 1 है। यह व्यापक रूप में भी सत्य है।**

उदाहरण 3 : मान लीजिए हम एक पासे को एक बार फेंकते हैं। (i) 4 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है? (ii) 4 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

हल : (i) यहाँ मान लीजिए कि '4 से बड़ी संख्या प्राप्त करना' घटना E है। सभी संभव परिणाम छः हैं, ये 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं। स्पष्टतः, घटना E के अनुकूल परिणाम 5 और 6 हैं। अतः E के अनुकूल परिणामों की संख्या 2 है। इसलिए

$$P(E) = P(4 \text{ से बड़ी संख्या}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) मान लीजिए '4 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त करना' घटना F है।

सभी संभव परिणाम = 6 हैं।

घटना F के अनुकूल परिणाम 1, 2, 3 और 4 हैं।

अत: F के अनुकूल परिणामों की संख्या 4 है।

इसलिए $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

क्या उपरोक्त उदाहरण में दी हुई घटना E और F प्रारंभिक घटनाएँ हैं? नहीं, ये प्रारंभिक घटनाएँ नहीं हैं, क्योंकि घटना E के 2 परिणाम हैं तथा घटना F के 4 परिणाम हैं।

टिप्पणी : उदाहरण 1 से, हम देखते हैं कि

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (1)$$

जहाँ घटना E 'एक चित प्राप्त करना' है तथा घटना F 'एक पट प्राप्त करना' है।

उदाहरण 3 के (i) और (ii) से भी हम देखते हैं कि

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \quad (2)$$

जहाँ घटना E '4 से बड़ी संख्या प्राप्त करना' तथा घटना F '4 के बराबर या कम संख्या प्राप्त करना' है।

ध्यान दीजिए कि 4 से बड़ी संख्या नहीं प्राप्त करने का अर्थ वही है जो 4 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त करने का है और इसी प्रकार इसका विलोम भी यही प्रकट करता है।

उपरोक्त (1) और (2) में, क्या घटना 'F', 'E नहीं' (not E) के समान नहीं है। हाँ, ऐसा ही है। हम घटना 'E नहीं ' को $\overline{E}$ से व्यक्त करते हैं।

अत:, $P(E) + P(E \text{ नहीं}) = 1$

अर्थात् $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ है, जिससे $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ प्राप्त होता है।

व्यापक रूप में, किसी घटना E के लिए यह सत्य है कि

$$\mathbf{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$$

घटना 'E नहीं' को निरूपित करने वाली घटना $\overline{E}$ घटना E की ***पूरक*** *(complement)* घटना कहलाती है। हम यह भी कहते हैं कि E और $\overline{E}$ परस्पर **पूरक घटनाएँ** हैं।

आगे बढ़ने से पहले, आइए निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर ज्ञात करने का प्रयत्न करें:

(i) पासे को एक बार फेंकने पर संख्या 8 प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है?

(ii) पासे को एक बार फेंकने पर 7 से छोटी संख्या प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है?

आइए (i) का उत्तर दें :

हम जानते हैं कि पासे को एक बार फेंकने पर केवल छः ही संभावित परिणाम हैं। ये परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 हैं। चूँकि पासे के किसी भी फलक पर 8 अंकित नहीं है, इसलिए 8 के अनुकूल कोई भी परिणाम नहीं है, अर्थात् ऐसे परिणामों की संख्या शून्य (0) है। दूसरे शब्दों में, पासे को एक बार फेंकने पर, संख्या 8 प्राप्त करना *असंभव (impossible)* है।

अतः $\quad$ P(8 प्राप्त करना) $= \frac{0}{6} = 0$

अर्थात् उस घटना, जिसका घटित होना असंभव है, की प्रायिकता 0 होती है। ऐसी घटना को एक **असंभव घटना (impossible event)** कहते हैं।

आइए (ii) का उत्तर दें :

चूँकि पासे के प्रत्येक फलक पर ऐसी संख्या लिखी है जो 7 से छोटी है, इसलिए पासे को एक बार फेंकने पर यह निश्चित है कि प्राप्त संख्या सदैव 7 से छोटी होगी। अतः, घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या सभी संभावित परिणामों की संख्या के बराबर होगी, जो 6 है।

इसलिए $\quad$ P(E) = P(7 से छोटी संख्या प्राप्त करना) $= \frac{6}{6} = 1$

अतः **उस घटना, जिसका घटित होना** *निश्चित (sure)* है, *की प्रायिकता 1 होती है।* ऐसी घटना को एक ***निश्चित*** *(sure)* या *निर्धारित (certain) घटना* कहते हैं।

टिप्पणी : प्रायिकता P(E) की परिभाषा से, हम देखते हैं कि अंश (घटना E के अनुकूल परिणामों की संख्या) सदैव हर (सभी संभव परिणामों की संख्या) से छोटा होता है या उसके बराबर होता है। अतः,

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

आइए अब एक उदाहरण, ताशों (playing cards) से संबंधित लें। क्या आपने ताशों की एक गड्डी देखी है? इसमें 52 पत्ते (cards) होते हैं, जो 4 समूहों में बँटे होते हैं। प्रत्येक समूह में 13 पत्ते होते हैं। ये 4 समूह हुकुम (spades) (♠), पान (hearts) (♥), ईंट (diamonds) (♦) और चिड़ी (clubs) (♣) हैं। चिड़ी और हुकुम काले रंग के होते हैं तथा पान और ईंट लाल रंग के होते हैं। प्रत्येक समूह के पत्ते : इक्का (ace), बादशाह (king), बेगम (queen), गुलाम (jack), 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 और 2 होते हैं। बादशाह, बेगम और गुलाम वाले पत्ते फेस कार्ड (*face cards*) कहलाते हैं।

उदाहरण 4 : अच्छी प्रकार से फेटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता परिकलित कीजिए कि यह पत्ता :

(i) एक इक्का होगा।

(ii) एक इक्का नहीं होगा।

हल : गड्डी को अच्छी प्रकार से फेटने से परिणामों का *समप्रायिक होना सुनिश्चित हो जाता है।*

(i) एक गड्डी में 4 इक्के होते हैं। मान लीजिए घटना E 'एक इक्का होना' है।

E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

सभी संभव परिणामों की संख्या = 52 (क्यों?)

अतः $$P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(ii) मान लीजिए घटना F 'एक इक्का नहीं' है।

माना F के अनुकूल परिणामों की संख्या = 52 – 4 = 48 (क्यों?)

सभी संभव परिणामों की संख्या = 52

अतः $$P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$$

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि F और कुछ नहीं बल्कि $\overline{E}$ ही है। अतः, हम P(F) को इस प्रकार भी परिकलित कर सकते हैं : $P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$.

उदाहरण 5 : दो खिलाड़ी संगीता और रेशमा टेनिस का एक मैच खेलते हैं। यह ज्ञात है कि संगीता द्वारा मैच जीतने की प्रायिकता 0.62 है। रेशमा के जीतने की क्या प्रायिकता है?

हल : मान लीजिए S और R क्रमशः संगीता के जीतने और रेशमा के जीतने की घटनाएँ व्यक्त करते हैं।

संगीता के जीतने की प्रायिकता = P(S) = 0.62 (दिया है)

रेशमा के जीतने की प्रायिकता = P(R) = 1 – P(S)

[चूँकि घटनाएँ R और S पूरक हैं]

= 1 – 0.62 = 0.38

उदाहरण 6 : सविता और हमीदा दो मित्र हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों (i) के जन्म-दिन भिन्न-भिन्न हों? (ii) का जन्मदिन एक ही हो? [लीप का वर्ष (Leap year) को छोड़ते हुए]

हल : दोनों मित्रों में से किसी एक लड़की, मान लीजिए, सविता का जन्मदिन वर्ष का कोई भी दिन हो सकता है। इसी प्रकार, दूसरी लड़की हमीदा का जन्मदिन भी वर्ष के 365 दिनों में से कोई एक दिन हो सकता है।

(i) यदि हमीदा का जन्मदिन सविता के जन्मदिन से भिन्न है, तो उसके जन्मदिन के अनुकूल परिणामों की संख्या $365 - 1 = 364$ होगी।

अतः P (हमीदा का जन्मदिन सविता के जन्मदिन से भिन्न है) $= \frac{364}{365}$

(ii) P(सविता और हमीदा का जन्मदिन एक ही हो)

$= 1 - $ P (दोनों का जन्मदिन भिन्न है)

$= 1 - \frac{364}{365}$ $\quad$ [$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ के प्रयोग से]

$= \frac{1}{365}$

उदाहरण 7 : किसी स्कूल की कक्षा X में 40 विद्यार्थी हैं जिनमें से 25 लड़कियाँ हैं और 15 लड़के हैं। कक्षा अध्यापिका को एक विद्यार्थी कक्षा-प्रतिनिधि के रूप में चुनना है। वह प्रत्येक विद्यार्थी का नाम एक अलग कार्ड पर लिखती है, जबकि कार्ड एक जैसे हैं। फिर वह इन कार्डों को एक थैले में डालकर अच्छी तरह से हिला देती है। इसके बाद वह थैले में से एक कार्ड निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि कार्ड पर लिखा हुआ नाम एक (i) लड़की का है? (ii) लड़के का है?

हल : कुल 40 विद्यार्थी हैं और इनमें से केवल एक नाम का कार्ड चुनना है।

(i) सभी संभव परिणामों की संख्या $= 40$

कार्ड पर लड़की का नाम होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 25 (क्यों?)

अब, P (कार्ड पर लड़की का नाम है) = P(लड़की) $= \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) कार्ड पर लड़के का नाम होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 15 (क्यों?)

अतः, P(कार्ड पर लड़के का नाम है) = P(लड़का) $= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

टिप्पणी : हम P(लड़का) को इस प्रकार भी निर्धारित कर सकते हैं :

P(लड़का) = 1 – P(लड़का नहीं) = 1 – P(लड़की) $= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

उदाहरण 8 : एक बक्से में 3 नीले, 2 सफेद और 4 लाल कंचे (marbles) हैं। यदि इस बक्से में से एक कंचा *यादृच्छया* निकाला जाता है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह कंचा (i) सफेद है? (ii) नीला है? (iii) लाल है?

हल : यह कहना कि कंचा यादृच्छया रूप से निकाला गया है, संक्षिप्त में यह कहने के बराबर है कि सभी परिणाम समप्रायिक हैं। अत:,

सभी संभव परिणामों की संख्या = 3 +2 + 4 = 9 (क्यों?)

मान लीजिए घटना W 'कंचा सफेद है' को, घटना B 'कंचा नीला है' को तथा घटना R 'कंचा लाल है' को व्यक्त करता है।

(i) घटना W के अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

अत: $P(W) = \frac{2}{9}$

इसी प्रकार, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ और (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

ध्यान दीजिए कि $P(W) + P(B) + P(R) = 1$ है।

उदाहरण 9 : हरप्रीत दो भिन्न-भिन्न सिक्कों को एक साथ उछालती है (मान लीजिए एक सिक्का ₹ 1 का है और दूसरा सिक्का ₹ 2 का है)। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह कम से कम एक चित प्राप्त करेगी?

हल : हम 'चित' के लिए H और 'पट' के लिए T लिखते हैं। जब दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है, तो संभावित परिणाम (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) हैं तथा ये सभी समप्रायिक हैं। यहाँ (H, H) का अर्थ है कि पहले सिक्के (मान लीजिए ₹ 1 के सिक्के) पर 'चित' आएगा और दूसरे सिक्के (₹ 2 के सिक्के) पर 'चित' आएगा। इसी प्रकार, (H, T) का अर्थ है कि पहले सिक्के पर 'चित' आएगा और दूसरे सिक्के पर 'पट' आएगा, इत्यादि।

घटना E 'कम से कम एक चित आना' के अनुकूल परिणाम (H, H), (H, T) और (T, H) हैं। (क्यों?)

अत: E के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

इसलिए $P(E) = \frac{3}{4}$

अर्थात् हरप्रीत द्वारा कम से कम एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{3}{4}$ है।

टिप्पणी : आप P(E) इस प्रकार भी ज्ञात कर सकते हैं:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \left(\text{चूँकि } P(\bar{E}) = P(\text{कोई चित नहीं}) = \frac{1}{4}\right)$$

क्या आपने यह देखा कि अब तक के सभी उदाहरणों में, प्रत्येक प्रयोग के सभी संभव परिणामों की संख्या परिमित थी? यदि नहीं, तो अब इसकी जाँच कर लीजिए।

अनेक प्रयोग ऐसे हैं, जहाँ परिणाम दो संख्याओं के बीच में कोई भी संख्या हो सकती है या जिनमें परिणाम एक वृत्त या आयत के अंदर का प्रत्येक बिंदु होता है, इत्यादि। क्या अब आप सभी संभव परिणामों को गिन सकते हैं? जैसाकि आप जानते हैं, यह संभव नहीं है, क्योंकि दो संख्याओं के बीच में अपरिमित रूप से अनेक संख्याएँ होती हैं, या यह कि एक वृत्त के अंदर अपरिमित रूप से अनेक बिंदु होते हैं। अतः, आपके द्वारा अध्ययन की गई (सैद्धांतिक) प्रायिकता की परिभाषा को वर्तमान रूप में यहाँ प्रयोग नहीं किया जा सकता। इस समस्या का फिर हल क्या है? इसके उत्तर के लिए, आइए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 10* **:** एक म्यूज़िकल चेयर (musical chair) खेल में, जो महिला संगीत बजा रही थी उसे सलाह दी गई कि वह संगीत प्रारंभ करने के बाद 2 मिनट के अंदर कभी भी संगीत बंद कर दे। इसकी क्या प्रायिकता है कि संगीत प्रारंभ होने के पहले आधे मिनट के अंदर बंद हो जाएगा?

हल : यहाँ संभव परिणाम 0 और 2 के बीच की सभी संख्याएँ हैं। यह संख्या रेखा का 0 से 2 तक का भाग है (देखिए आकृति 15.1)।

आकृति 15.1

मान लीजिए घटना E 'संगीत प्रारंभ होने के पहले आधे मिनट में बंद हो जाता है'।

E के अनुकूल परिणाम संख्या रेखा पर 0 से $\frac{1}{2}$ के बीच के सभी बिंदु हैं।

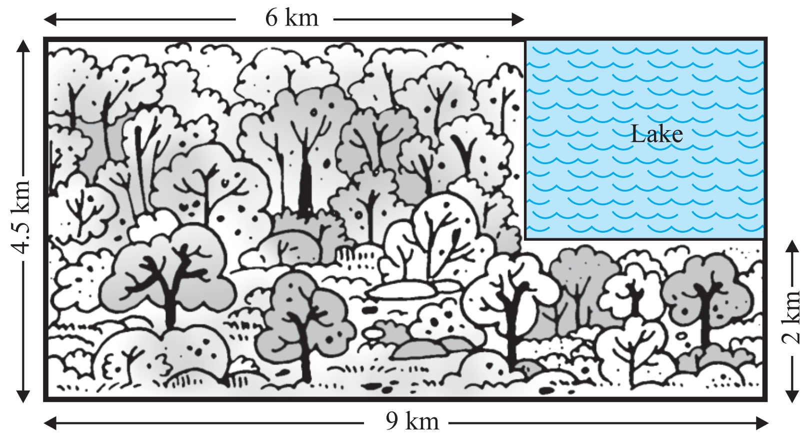
चूँकि सभी परिणाम समप्रायिक हैं, इसलिए हम यह तर्क दे सकते हैं कि कुल दूरी 2 में से दूरी $\frac{1}{2}$ घटना E के अनुकूल है।

* यह परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

अतः $$P(E) = \frac{\text{घटना E के अनुकूल दूरी}}{\text{पूरी दूरी जिसमें परिणाम स्थित हो सकते हैं}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

क्या हम उदाहरण 10 की अवधारणा को किसी घटना की प्रायिकता उसके अनुकूल क्षेत्रफल और संपूर्ण क्षेत्रफल के अनुपात के रूप में विस्तृत कर सकते हैं।

उदाहरण 11* : एक लापता हेलीकॉप्टर के बारे में सूचना मिलती है कि वह आकृति 15.2 में दर्शाए आयताकार क्षेत्र में कहीं गिर गया है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह आकृति में दर्शाई गई झील में गिरा है?



आकृति 15.2

हल : हेलीकॉप्टर का आयताकार क्षेत्र में कहीं भी गिरना समप्रायिक है।

संपूर्ण क्षेत्र का क्षेत्रफल, जहाँ हेलीकॉप्टर गिर सकता है

$$= (4.5 \times 9)\ km^2 = 40.5\ km^2$$

झील का वास्तविक क्षेत्रफल $= (2.5 \times 3)\ km^2 = 7.5\ km^2$

अतः, P (हेलीकॉप्टर झील में गिरा है) $= \frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$ है।

उदहारण 12 : एक डिब्बे में 100 कमीजें हैं, जिसमें से 88 अच्छी हैं तथा 8 में थोड़ी सी खराबी है और 4 में अधिक खराबी है। एक व्यापारी जिम्मी वे ही कमीजें स्वीकार करता है जो अच्छी

* यह परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

हैं, जबकि एक अन्य व्यापारी सुजाता उन्हीं कमीजों को अस्वीकार करती है जिनमें खराबी अधिक है। इस डिब्बे में से एक कमीज को यादृच्छया रूप से निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह कमीज

(i) जिम्मी को स्वीकार हो? (ii) सुजाता को स्वीकार हो?

हल : 100 कमीजों के डिब्बे में से एक कमीज यादृच्छया रूप से निकाली जाती है। अतः यहाँ 100 समप्रायिक परिणाम हैं।

(i) जिम्मी के अनुकूल (को स्वीकार) परिणामों की संख्या = 88 (क्यों?)

अतः, P (कमीज जिम्मी को स्वीकार है) $= \dfrac{88}{100} = 0.88$

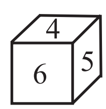
(ii) सुजाता के अनुकूल परिणामों की संख्या = 88 + 8 = 96 (क्यों?)

अतः, P (कमीज सुजाता को स्वीकार है) $= \dfrac{96}{100} = 0.96$

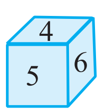
उदाहरण 13 : एक सलेटी पासे और एक लाल पासे को एक साथ फेंका जाता है। सभी संभावित परिणामों को लिखिए। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों पासों की संख्याओं का योग

(i) 8 है। (ii) 13 है। (iii) 12 से छोटी या उसके बराबर है।

हल : जब लाल पासा '1' दर्शाता है, तो सलेटी पासे पर संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से कोई भी संख्या हो सकती है। यही तब भी होगा, जब लाल पासे पर '2', '3', '4', '5' या '6' होगा। इस प्रयोग के संभावित परिणामों को नीचे सारणी में दिया गया है। प्रत्येक क्रमित युग्म की पहली संख्या लाल पासे पर आने वाली संख्या है तथा दूसरी संख्या सलेटी पासे पर आने वाली संख्या है।



सलेटी



लाल

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

आकृति 15.3

ध्यान दीजिए कि युग्म (1, 4) युग्म (4, 1) से भिन्न है (क्यों?)

अतः, संभावित परिणामों की संख्या = 6 × 6 = 36 है।

(i) E द्वारा व्यक्त घटना 'संख्याओं का योग 8 है' के अनुकूल परिणाम (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) और (6, 2) हैं (देखिए आकृति 15.3)।

अर्थात् E के अनुकूल परिणाम = 5

इसलिए $$P(E) = \frac{5}{36}$$

(ii) जैसा कि आप आकृति 15.3 से देख सकते हैं, घटना F, 'संख्याओं का योग 13 है' के अनुकूल कोई भी परिणाम नहीं है।

अतः $$P(F) = \frac{0}{36} = 0$$

(iii) जैसा कि आप आकृति 15.3 से देख सकते हैं, घटना G 'संख्याओं का योग ≤ 12 से छोटा या उसके बराबर है' के अनुकूल सभी परिणाम हैं।

अतः $$P(G) = \frac{36}{36} = 1$$

प्रश्नावली 15.1

1. निम्नलिखित कथनों को पूरा कीजिए :

(i) घटना E की प्रायिकता + घटना 'E नहीं' की प्रायिकता = ________ है।

(ii) उस घटना की प्रायिकता जो घटित नहीं हो सकती ________ है। ऐसी घटना ________ कहलाती है।

(iii) उस घटना की प्रायिकता जिसका घटित होना निश्चित है ________ है। ऐसी घटना ________ कहलाती है।

(iv) किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग ________ है।

(v) किसी घटना की प्रायिकता ________ से बड़ी या उसके बराबर होती है तथा ________ से छोटी या उसके बराबर होती है।

2. निम्नलिखित प्रयोगों में से किन-किन प्रयोगों के परिणाम समप्रायिक हैं? स्पष्ट कीजिए।

(i) एक ड्राइवर कार चलाने का प्रयत्न करता है। कार चलना प्रारंभ हो जाती है या कार चलना प्रारंभ नहीं होती है।

(ii) एक खिलाड़ी बास्केटबॉल को बास्केट में डालने का प्रयत्न करती है। वह बास्केट में बॉल डाल पाती है या नहीं डाल पाती है।

(iii) एक सत्य-असत्य प्रश्न का अनुमान लगाया जाता है। उत्तर सही है या गलत होगा।

(iv) एक बच्चे का जन्म होता है। वह एक लड़का है या एक लड़की है।

3. फुटबॉल के खेल को प्रारंभ करते समय यह निर्णय लेने के लिए कि कौन-सी टीम पहले बॉल लेगी, इसके लिए सिक्का उछालना एक न्यायसंगत विधि क्यों माना जाता है?

4. निम्नलिखित में से कौन सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) -1.5 (C) 15% (D) 0.7

5. यदि $P(E) = 0.05$ है, तो 'E नहीं' की प्रायिकता क्या है?

6. एक थैले में केवल नीबू की महक वाली मीठी गोलियाँ हैं। मालिनी बिना थैले में झाँके उसमें से एक गोली निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह निकाली गई गोली

(i) संतरे की महक वाली है?

(ii) नीबू की महक वाली है?

7. यह दिया हुआ है कि 3 विद्यार्थियों के एक समूह में से 2 विद्यार्थियों के जन्मदिन एक ही दिन न होने की प्रायिकता 0.992 है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इन 2 विद्यार्थियों का जन्मदिन एक ही दिन हो?

8. एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदे हैं। इस थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। इसकी प्रायिकता क्या है कि गेंद (i) लाल हो? (ii) लाल नहीं हो?

9. एक डिब्बे में 5 लाल कंचे, 8 सफेद कंचे और 4 हरे कंचे हैं। इस डिब्बे में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाला गया कंचा

(i) लाल है? (ii) सफेद है? (iii) हरा नहीं है?

10. एक पिग्गी बैंक (piggy bank) में, 50 पैसे के सौ सिक्के हैं, ₹ 1 के पचास सिक्के हैं, ₹ 2 के बीस सिक्के और ₹ 5 के दस सिक्के हैं। यदि पिग्गी बैंक को हिलाकर उल्टा करने पर कोई एक सिक्का गिरने के परिणाम समप्रायिक हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गिरा हुआ सिक्का (i) 50 पैसे का होगा? (ii) ₹ 5 का नहीं होगा?

11. गोपी अपने जल-जीव कुंड (aquarium) के लिए एक दुकान से मछली खरीदती है। दुकानदार एक टंकी, जिसमें 5 नर मछली और 8 मादा मछली हैं, में से एक मछली यादृच्छया उसे देने के लिए निकालती है (देखिए आकृति 15.4)। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाली गई मछली नर मछली है?

आकृति 15.4

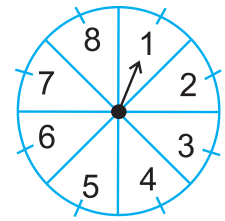
12. संयोग (chance) के एक खेल में, एक तीर को घुमाया जाता है, जो विश्राम में आने के बाद संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 और 8 में से किसी एक संख्या को इंगित करता है (देखिए आकृति 15.5)। यदि ये सभी परिणाम समप्रायिक हों तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह तीर इंगित

(i) 8 को करेगा?

(ii) एक विषम संख्या को करेगा?

(iii) 2 से बड़ी संख्या को करेगा?

(iv) 9 से छोटी संख्या को करेगा?



आकृति 15.5

13. एक पासे को एक बार फेंका जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(i) एक अभाज्य संख्या (ii) 2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या (iii) एक विषम संख्या

14. 52 पत्तों की अच्छी प्रकार से फेटी गई एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(i) लाल रंग का बादशाह

(ii) एक फेस कार्ड अर्थात् तस्वीर वाला पत्ता

(iii) लाल रंग का तस्वीर वाला पत्ता

(iv) पान का गुलाम

(v) हुकुम का पत्ता

(vi) एक ईंट की बेगम

15. ताश के पाँच पत्तों–ईंट का दहला, गुलाम, बेगम, बादशाह और इक्का–को पलट करके अच्छी प्रकार फेटा जाता है। फिर इनमें से यादृच्छया एक पत्ता निकाला जाता है।

(i) इसकी क्या प्रायिकता है कि यह पत्ता एक बेगम है?

(ii) यदि बेगम निकल आती है, तो उसे अलग रख दिया जाता है और एक अन्य पत्ता निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दूसरा निकाला गया पत्ता (a) एक इक्का है? (b) एक बेगम है?

16. किसी कारण 12 खराब पेन 132 अच्छे पेनों में मिल गए हैं। केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है। इस मिश्रण में से, एक पेन यादृच्छया निकाला जाता है। निकाले गए पेन की अच्छा होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

17. (i) 20 बल्बों के एक समूह में 4 बल्ब खराब हैं। इस समूह में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब होगा?

(ii) मान लीजिए (i) में निकाला गया बल्ब खराब नहीं है और न ही इसे दुबारा बल्बों के साथ मिलाया जाता है। अब शेष बल्बों में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब नहीं होगा?

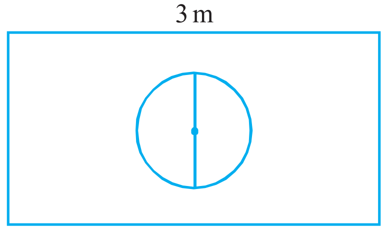
18. एक पेटी में 90 डिस्क (discs) हैं, जिन पर 1 से 90 तक संख्याएँ अंकित हैं। यदि इस पेटी में से एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस डिस्क पर अंकित होगी : (i) दो अंकों की एक संख्या (ii) एक पूर्ण वर्ग संख्या (iii) 5 से विभाज्य एक संख्या।

19. एक बच्चे के पास ऐसा पासा है जिसके फलकों पर निम्नलिखित अक्षर अंकित हैं :

A B C D E A

इस पासे को एक बार फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि (i) A प्राप्त हो? (ii) D प्राप्त हो?

20.* मान लीजिए आप एक पासे को आकृति 15.6 में दर्शाए आयताकार क्षेत्र में यादृच्छया रूप से गिराते हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह पासा 1m व्यास वाले वृत्त के अंदर गिरेगा?



आकृति 15.6

21. 144 बॉल पेनों के एक समूह में 20 बॉल पेन खराब हैं और शेष अच्छे हैं। आप वही पेन खरीदना चाहेंगे जो अच्छा हो, परंतु खराब पेन आप खरीदना नहीं चाहेंगे। दुकानदार इन पेनों में से, यादृच्छया एक पेन निकालकर आपको देता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) आप वह पेन खरीदेंगे?

(ii) आप वह पेन नहीं खरीदेंगे?

22. उदाहरण 13 को देखिए। (i) निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

घटना दोनों पासों की संख्याओं का योग	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रायिकता	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) एक विद्यार्थी यह तर्क देता है कि 'यहाँ कुल 11 परिणाम 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 और 12 हैं। अत:, प्रत्येक की प्रायिकता $\frac{1}{11}$ है।' क्या आप इस तर्क से सहमत हैं? सकारण उत्तर दीजिए।

* यह परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

23. एक खेल में एक रुपए के सिक्के को तीन बार उछाला जाता है और प्रत्येक बार का परिणाम लिख लिया जाता है। तीनों परिणाम समान होने पर, अर्थात् तीन चित या तीन पट प्राप्त होने पर, हनीफ खेल में जीत जाएगा, अन्यथा वह हार जाएगा। हनीफ के खेल में हार जाने की प्रायिकता परिकलित कीजिए।

24. एक पासे को दो बार फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) 5 किसी भी बार में नहीं आएगा? (ii) 5 कम से कम एक बार आएगा?

[**संकेत :** एक पासे को दो बार फेंकना और दो पासों को एक साथ फेंकना एक ही प्रयोग माना जाता है।]

25. निम्नलिखित में से कौन से तर्क सत्य हैं और कौन से तर्क असत्य हैं? सकारण उत्तर दीजिए।

(i) यदि दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है, तो इसके तीन संभावित परिणाम- दो चित, दो पट या प्रत्येक एक बार हैं। अतः, इनमें से प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है।

(ii) यदि एक पासे को फेंका जाता है, तो इसके दो संभावित परिणाम–एक विषम संख्या या एक सम संख्या हैं। अतः एक विषम संख्या ज्ञात करने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।

प्रश्नावली 15.2 (ऐच्छिक)*

1. दो ग्राहक श्याम और एकता एक विशेष दुकान पर एक ही सप्ताह में जा रहे हैं (मंगलवार से शनिवार तक)। प्रत्येक द्वारा दुकान पर किसी दिन या किसी अन्य दिन जाने के परिणाम समप्रायिक हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों उस दुकान पर (i) एक ही दिन जाएँगे? (ii) क्रमागत दिनों में जाएँगे? (iii) भिन्न-भिन्न दिनों में जाएँगे?

2. एक पासे के फलकों पर संख्याएँ 1, 2, 2, 3, 3 और 6 लिखी हुई हैं। इसे दो बार फेंका जाता है तथा दोनों बार प्राप्त हुई संख्याओं के योग लिख लिए जाते हैं। दोनों बार फेंकने के बाद, प्राप्त योग के कुछ संभावित मान निम्नलिखित सारणी में दिए हैं इस सारणी को पूरा कीजिए।

पहली बार फेंकने के मान

दूसरी बार फेंकने के मान

+	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2					5	
3						
3			5			9
6	7	8	8	9	9	12

* यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।

इसकी क्या प्रायिकता है कि कुल योग

(i) एक सम संख्या होगा? (ii) 6 है? (iii) कम से कम 6 है?

3. एक थैले में 5 लाल गेंद और कुछ नीली गेंदे हैं यदि इस थैले में से नीली गेंद निकालने की प्रायिकता लाल गेंद निकालने की प्रायिकता की दुगुनी है, तो थैले में नीली गेंदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

4. एक पेटी में 12 गेंदे हैं, जिनमें से x गेंद काली है। यदि इसमें से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद काली है।

यदि इस पेटी में 6 काली गेंद और डाल दी जाएँ, तो काली गेंद निकालने की प्रायिकता पहली प्रायिकता की दुगुनी हो जाती है। x का मान ज्ञात कीजिए।

5. एक जार में 24 कंचे हैं जिनमें कुछ हरे हैं और शेष नीले हैं। यदि इस जार में से यादृच्छया एक कंचा निकाला जाता है तो इस कंचे के हरा होने की प्रायिकता $\frac{2}{3}$ है। जार में नीले कंचों की संख्या ज्ञात कीजिए।

15.3 सारांश

इस अध्याय में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. प्रायोगिक प्रायिकता और सैद्धांतिक प्रायिकता में अंतर
2. घटना E की सैद्धांतिक (या परंपरागत) प्रायिकता P(E) को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जाता है:

$$P(E) = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के सभी संभावित परिणामों की संख्या}}$$

   जहाँ हम कल्पना करते हैं कि प्रयोग के सभी परिणाम समप्रायिक हैं।
3. एक निश्चित (या निर्धारित) घटना की प्रायिकता 1 होती है।
4. एक असंभव घटना की प्रायिकता 0 होती है।
5. घटना E की प्रायिकता एक ऐसी संख्या P(E) है कि

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

6. वह घटना जिसका केवल एक ही परिणाम हो एक प्रारंभिक घटना कहलाती है। किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकता का योग 1 होता है।
7. किसी भी घटना E के लिए $P(E) + P(\overline{E}) = 1$ होता है, जहाँ $\overline{E}$ घटना 'E नहीं' को व्यक्त करता है। E और $\overline{E}$ पूरक घटनाएँ कहलाती हैं।

पाठकों के लिए विशेष

एक घटना की प्रायोगिक या आनुभविक प्रायिकता वास्तविक रूप से घटना के घटित होने पर आधारित होती है, जबकि उस घटना की सैद्धांतिक प्रायिकता में कुछ कल्पनाओं के आधार पर यह प्रागुक्ति की जाती है कि क्या घटना घटेगी। जैसे-जैसे एक प्रयोग में अभिप्रयोगों की संख्या बढ़ती जाती है, वैसे-वैसे प्रायोगिक और सैद्धांतिक प्रायिकताओं की लगभग बराबर होने की प्रत्याशा की जा सकती है।

गणितीय उपपत्तियाँ (Proofs in Mathematics) A1

A1.1 भूमिका

हमारे दैनिक जीवन में तर्क प्रस्तुत करने और स्पष्ट चिंतन करने की क्षमता अत्यधिक उपयोगी होती है। उदाहरण के लिए मान लीजिए एक राजनीतिज्ञ आप से यह कहता है कि 'यदि आप साफ-सुथरी सरकार चाहते हैं तो आपको मुझे वोट देना चाहिए।' वास्तव में आपके अंदर वह यह विश्वास पैदा करना चाहता है कि यदि आपने उसे वोट नहीं दिया, तो आपको साफ-सुथरी सरकार नहीं मिल सकती है। इसी प्रकार, यदि एक विज्ञापन में यह बताया जाता है कि 'बुद्धिमान व्यक्ति XYZ प्रकार के जूते पहनते हैं' तो कंपनी आपके अंदर यह बात पैदा करना चाहती है कि यदि आप XYZ प्रकार के जूते नहीं पहनते हैं, तो आप एक बुद्धिमान व्यक्ति नहीं हैं। आप स्वयं यह देख सकते हैं कि ऊपर दिए गए दोनों ही कथन आम जनता को बहका सकते हैं। अत: यदि हम तर्क प्रस्तुत करने की प्रक्रिया को सही प्रकार से समझते हैं, तो अनजाने में हम इस प्रकार के जाल में नहीं फँस सकते हैं।

तर्क प्रस्तुत करने का सही प्रयोग गणित का आधार है, विशेष रूप से उपपत्तियाँ प्रस्तुत करने में। कक्षा IX में, आपको उपपत्तियों की संकल्पना से परिचित कराया गया है और वास्तव में आपने अनेक कथनों, विशेष रूप से ज्यामिति के कथनों को सिद्ध भी किया है। स्मरण कीजिए कि एक उपपत्ति में अनेक गणितीय कथन होते हैं, जिनमें से प्रत्येक कथन उपपत्ति के पिछले कथन से या पहले सिद्ध किए गए प्रमेय से, या किसी अभिगृहीत से, या परिकल्पनाओं से तार्किक रूप से निगमित होता है। उपपत्ति की रचना में प्रयुक्त होने वाला हमारा मुख्य साधन निगमनिक तर्कण की प्रक्रिया है।

इस अध्याय में हम सबसे पहले इस बात पर पुनर्विचार करेंगे कि गणितीय कथन क्या होता है। इसके बाद हम अनेक उदाहरणों द्वारा निगमनिक तर्कण देने के कौशल को और

अधिक सक्षम बनाने पर विचार करेंगे। यहाँ हम निषेध की संकल्पना और एक दिए हुए कथन का निषेध ज्ञात करने के बारे में भी चर्चा करेंगे। इसके बाद हम इस बात की चर्चा करेंगे कि किसी दिए हुए कथन का विलोम ज्ञात करने का अर्थ क्या होता है। अंत में, हम अनेक प्रमेयों की उपपत्तियों का विश्लेषण करके कक्षा IX में पढ़ी गई किसी उपपत्ति के अवयवों पर पुनर्विचार करेंगे। यहाँ हम विरोधोक्ति (अंतर्विरोध) द्वारा उपपत्ति की धारणा पर भी विचार करेंगे, जिसे आप कक्षा IX में सीख चुके हैं तथा इस पुस्तक के अनेक अन्य अध्यायों में भी प्रयोग कर चुके हैं।

A1.2 गणितीय कथनों का पुनरीक्षण

स्मरण कीजिए कि 'कथन' एक अर्थपूर्ण वाक्य होता है, जो न तो आदेश होता है, न विस्मयादिबोधक (exclamation) होता है और न ही प्रश्न होता है। उदाहरण के लिए 'वर्ल्ड कप के फाइनल में कौन-सी दो टीमें खेल रही हैं?' एक प्रश्न है, एक कथन नहीं है। 'जाइए और अपना गृहकार्य पूरा कीजिए', एक आदेश है, एक कथन नहीं है। 'क्या ही बढ़िया गोल है!' एक विस्मयादिबोधक है, एक कथन नहीं है।

स्मरण रहे कि व्यापक रूप में वाक्य निम्नलिखित में से कोई एक हो सकता है:

- *सत्य*
- *असत्य*
- *संदिग्ध*

कक्षा IX में, आप यह भी पढ़ चुके हैं कि गणित में, **कथन केवल तभी स्वीकार्य होता है जबकि वह या तो सत्य हो या असत्य हो।** अत: संदिग्ध वाक्यों को गणितीय कथन नहीं माना जाता है।

आइए हम कुछ उदाहरण लेकर अपने ज्ञान को दोहरा लें।

उदाहरण 1 : बताइए कि निम्नलिखित वाक्य कथन है या नहीं है। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) सूर्य पृथ्वी की परिक्रमा करता है।

(ii) वाहन के चार पहिए होते हैं।

(iii) प्रकाश की चाल लगभग 3×10^5 km/s है।

(iv) नवंबर से मार्च तक कोलकाता की सड़क बंद रहेगी।

(v) सभी मानव नश्वर होते हैं।

हल :

(i) यह वाक्य असत्य है, क्योंकि खगोलविदों ने यह स्थापित कर दिया है कि पृथ्वी सूर्य की परिक्रमा करती है। अतः यह एक कथन है।

(ii) यह वाक्य संदिग्ध है, क्योंकि हम यह निर्णय नहीं कर सकते हैं कि यह सत्य है या असत्य है। यह इस बात पर निर्भर करता है कि वाहन कौन-सा है, क्योंकि वाहन 2, 3, 4, 6, 10, आदि पहियों वाला हो सकता है। अतः यह एक कथन नहीं है।

(iii) यह वाक्य सत्य है, जैसाकि भौतिकविदों नें सत्यापित किया है। अतः यह एक कथन है।

(iv) यह वाक्य संदिग्ध है, क्योंकि यह स्पष्ट नहीं है कि यहाँ किस सड़क के बारे में कहा जा रहा है। अतः यह एक कथन नहीं है।

(v) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि प्रत्येक मानव को कभी न कभी मरना ही है। अतः यह एक कथन है।

उदाहरण 2 : बताइए कि निम्नलिखित वाक्य सत्य हैं या असत्य हैं। अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) सभी समबाहु त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज होते हैं।

(ii) कुछ समद्विबाहु त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।

(iii) सभी समद्विबाहु त्रिभुज समबाहु त्रिभुज होते हैं।

(iv) कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक होती हैं।

(v) कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक नहीं होती हैं।

(vi) सभी पूर्णांक परिमेय संख्या नहीं होते हैं।

(vii) किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के बीच एक भी परिमेय संख्या नहीं होती है।

हल :

(i) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि समबाहु त्रिभुज की भुजाएँ समान होती हैं, अतः ये समद्विबाहु त्रिभुज हैं।

(ii) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि वे समद्विबाहु त्रिभुज जिसके आधार कोण $60°$ के हैं, समबाहु त्रिभुज होते हैं।

(iii) यह वाक्य असत्य है। इसका एक प्रत्युदाहरण दीजिए।

(iv) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि $\frac{p}{q}$ के रूप की ऐसी परिमेय संख्याएँ, जहाँ p पूर्णांक हैं और $q = 1$, पूर्णांक हैं। (उदाहरण के लिए $3 = \frac{3}{1}$)

(v) यह वाक्य सत्य है, क्योंकि $\frac{p}{q}$ के रूप की ऐसी परिमेय संख्याएँ, जहाँ p, q पूर्णांक हैं और q, p को विभाजित नहीं करता, पूर्णांक नहीं हैं (उदाहरण के लिए $\frac{3}{2}$)

(vi) यह वाक्य इस कथन के समान है कि 'एक ऐसा पूर्णांक है, जो परिमेय संख्या नहीं है'। यह वाक्य असत्य है, क्योंकि सभी पूर्णांक परिमेय संख्या होते हैं।

(vii) यह वाक्य असत्य है। जैसाकि आप जानते हैं किन्हीं दो परिमेय संख्याओं r और s के बीच $\frac{r+s}{2}$ होती हैं, जो एक परिमेय संख्या है।

उदाहरण 3 : यदि $x < 4$ है तो निम्नलिखित कथनों में कौन से सत्य हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

हल :

(i) यह कथन असत्य है, क्योंकि, उदाहरण के लिए, $x = 3 < 4$, $2x > 8$ को संतुष्ट नहीं करता है।

(ii) यह कथन असत्य है, क्योंकि उदाहरण के लिए $x = 3.5 < 4$, $2x < 6$ को संतुष्ट नहीं करता है।

(iii) यह कथन सत्य है, क्योंकि यह वही है जो कि $x < 4$ है।

उदाहरण 4 : उपयुक्त प्रतिबंध लगाकर निम्नलिखित कथनों का पुनर्कथन दीजिए, जिससे कि वे कथन सत्य हो जाएँ?

(i) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो वह एक आयत होता है।

(ii) किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

(iii) सभी धन पूर्णांक p के लिए $\sqrt{p}$ अपरिमेय होता है।

(iv) सभी द्विघात समीकरण के दो वास्तविक मूल होते हैं।

हल :

(i) यदि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो वह एक आयत होता है।

(ii) एक त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

(iii) सभी अभाज्य संख्याओं p के लिए $\sqrt{p}$ अपरिमेय होता है।

(iv) सभी द्विघात समीकरण के अधिक से अधिक दो वास्तविक मूल होते हैं।

टिप्पणी : ऊपर के कथनों का पुनःकथन अन्य प्रकार भी दिया जा सकता है। उदाहरण के लिए (iii) का पुनःकथन '$\sqrt{p}$ अपरिमेय है, जहाँ p ऐसा धन पूर्णांक हैं, जो पूर्ण वर्ग नहीं है।'

प्रश्नावली A1.1

1. बताइए कि निम्नलिखित वाक्य कथन हैं या नहीं। यदि कथन हैं, तो बताइए कि वे सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।

(i) गणित की सभी पाठ्य पुस्तकें रोचक होती हैं।

(ii) पृथ्वी से सूर्य की दूरी लगभग 1.5×10^8 km है।

(iii) सभी मानव वृद्ध हो जाते हैं।

(iv) उत्तरकाशी से हर्सिल की यात्रा थका देने वाली है।

(v) महिला ने बाइनाकुलर से एक हाथी देखा।

2. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य। अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।

(i) सभी षट्भुज बहुभुज होते हैं।

(ii) कुछ बहुभुज पंचभुज होते हैं।

(iii) सभी सम संख्याएँ 2 से भाज्य नहीं होती हैं।

(iv) कुछ वास्तविक संख्याएँ अपरिमेय होती हैं।

(v) सभी वास्तविक संख्याएँ परिमेय नहीं होती हैं।

3. मान लीजिए a और b वास्तविक संख्याएँ हैं, जहाँ $ab \neq 0$ है, तब बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन से सत्य हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी दीजिए।

(i) a और b दोनों अनिवार्यतः शून्य होने चाहिए। (ii) a और b दोनों शून्येतर होने चाहिए।

(iii) या तो a या b शून्येतर होना चाहिए।

4. उपयुक्त प्रतिबंधों के साथ निम्नलिखित कथनों का ऐसा पुनःकथन दीजिए जिससे कि वे सत्य हो जाएँ।

(i) यदि $a^2 > b^2$, तो $a > b$

(ii) यदि $x^2 = y^2$, तो $x = y$

(iii) यदि $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, तो $x = 0$

(iv) चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

A1.3 निगमनिक तर्कण (Deductive reasoning)

कक्षा IX में, आपको निगमनिक तर्कण की संकल्पना से परिचित कराया गया था। यहाँ हम अनेक उदाहरणों द्वारा यह स्पष्ट करेंगे कि किस प्रकार निगमनिक तर्कण के प्रयोग से, सत्य माने गए प्रदत्त कथनों से निष्कर्ष निकालते हैं। इन कथनों को परिकल्पनाएँ या आधार वाक्य (Hypotheses or Premises) कहते हैं। अब हम कुछ उदाहरणों से प्रारंभ करेंगे।

उदाहरण 5 : दिया हुआ है कि बीजापुर कर्नाटक राज्य में है, और मान लीजिए कि शबाना बीजापुर में रहती है। किस राज्य में शबाना रहती है?

हल : यहाँ दो परिकल्पनाएँ हैं :

(i) बीजापुर कर्नाटक राज्य में है। (ii) शबाना बीजापुर में रहती है।

इन परिकल्पनाओं से हम यह निगमित (deduce) करते हैं कि शबाना कर्नाटक राज्य में रहती है।

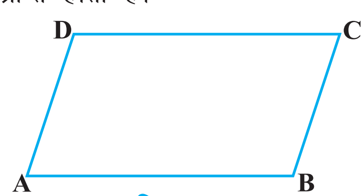
उदाहरण 6 : दिया हुआ है कि गणित की सभी पाठ्य-पुस्तकें रोचक होती हैं और मान लीजिए आप गणित की एक पाठ्य-पुस्तक पढ़ रहे हैं। जो पाठ्य-पुस्तक आप पढ़ रहे हैं उसके बारे में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

हल : दो परिकल्पनाओं का प्रयोग करके हम यह निगमित कर सकते हैं कि आप एक रोचक पाठ्य-पुस्तक पढ़ रहे हैं।

उदाहरण 7 : $y = -6x + 5$ दिया हुआ है और मान लीजिए कि $x = 3$ है, y का मान क्या है?

हल : दोनों परिकल्पनाओं से हमें $y = -6(3) + 5 = -13$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 8 : दिया हुआ है कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और मान लीजिए कि AD = 5 cm, AB = 7 cm (आकृति A1.1 देखिए)। DC और BC की लंबाइयों के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?



आकृति A1.1

हल : हमें यह दिया हुआ है कि ABCD एक समांतरचतुर्भुज है अतः हम यह निगमित कर लेते हैं कि वे सभी गुणधर्म जो एक समांतरचतुर्भुज के होते हैं, ABCD के भी हैं। इसलिए विशेष रूप से यह गुणधर्म कि 'एक समांतरचतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ' एक-दूसरे के बराबर होती हैं, ABCD पर भी लागू होता है। क्योंकि हम जानते हैं कि AD = 5 cm, इसलिए हम यह निगमित कर सकते हैं कि BC = 5 cm है। इसी प्रकार हम यह निगमित कर सकते हैं कि DC = 7 cm

टिप्पणी : इस उदाहरण में हम देखते हैं कि किस प्रकार एक दी हुई परिकल्पना में छिपे गुणधर्मों को ज्ञात करने और लागू करने की आवश्यकता प्राय: पड़ती रहती है।

उदाहरण 9 : दिया हुआ है कि सभी अभाज्य संख्याओं p के लिए $\sqrt{p}$ अपरिमेय है और मान लीजिए कि 19423 एक अभाज्य संख्या है। $\sqrt{19423}$ के संबंध में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

हल : हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\sqrt{19423}$ अपरिमेय है।

ऊपर के उदाहरणों में इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि हम यह नहीं जानते कि परिकल्पनाएँ सत्य हैं या नहीं। हम यह मानकर चलते हैं कि वे सत्य हैं, और तब निगमनिक तर्कण का प्रयोग करते हैं। दृष्टांतत: उदाहरण 9 में हमने इस बात की जाँच नहीं की है कि 19423 अभाज्य संख्या है या नहीं। अपने तर्क के लिए हम इसे अभाज्य संख्या मान लेते हैं। इस अनुच्छेद में हम इस बात पर बल देने का प्रयास कर रहे हैं कि यदि एक विशेष कथन दिया हुआ है, तो एक निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए हम निगमनिक तर्कण का प्रयोग किस प्रकार करते हैं। वास्तव में यहाँ इस बात का अधिक महत्त्व है कि हम तर्कण की सही प्रक्रिया का प्रयोग करें और तर्कण की यह प्रक्रिया परिकल्पनाओं की सत्यता या असत्यता पर निर्भर नहीं होती है। फिर भी, इस बात की ओर भी ध्यान देना चाहिए कि यदि हम गलत परिकल्पना से प्रारंभ करेंगे, तो हम गलत निष्कर्ष पर भी पहुँच सकते हैं।

प्रश्नावली A1.2

1. दिया हुआ है कि सभी महिलाएँ नश्वर हैं और मान लीजिए A एक महिला है। A के बारे में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
2. दिया हुआ है कि दो परिमेय संख्या का गुणनफल परिमेय है और मान लीजिए a और b परिमेय हैं तब ab के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
3. दिया हुआ है कि अपरिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार अनवसानी (non-terminating) और अनावर्ती (non-recurring) है और $\sqrt{17}$ एक अपरिमेय संख्या है। $\sqrt{17}$ के दशमलव प्रसार के बारे में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
4. दिया हुआ है कि $y = x^2 + 6$ और $x = -1$ तब y के मान के बारे में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?
5. दिया हुआ है कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है और $\angle B = 80°$ तब समांतर चतुर्भुज के अन्य कोणों के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

6. दिया हुआ है कि PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है और इसके विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। चतुर्भुज के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

7. दिया हुआ है कि सभी अभाज्य संख्या p के लिए $\sqrt{p}$ अपरिमेय है और यह भी मान लीजिए कि 3721 एक अभाज्य संख्या है। क्या आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\sqrt{3721}$ एक अपरिमेय संख्या है? क्या आपका निष्कर्ष सही है? क्यों या क्यों नहीं?

A1.4 कंजेक्चर (conjectures), प्रमेय, उपपत्तियाँ और गणितीय तर्कण

आकृति A1.2 पर विचार कीजिए। पहले वृत्त पर एक बिंदु है, दूसरे वृत्त पर दो बिंदु हैं, तीसरे पर तीन, इत्यादि। प्रत्येक स्थिति में बिंदुओं को मिलाने वाली सभी संभव रेखाएँ खींची गई हैं।

रेखाएँ वृत्त को परस्पर अपवर्जी क्षेत्रों (जिनमें कोई उभयनिष्ठ भाग नहीं होता है) में विभाजित करती हैं। हम इन्हें गिन सकते हैं और अपने परिणामों को सारणीबद्ध करते हैं। जैसा नीचे दर्शाया गया है:

आकृति A1.2

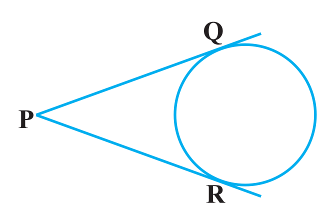
बिंदुओं की संख्या	प्रदेशों की संख्या
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

आप में से कुछ लोग उस सूत्र को प्राप्त कर सके होंगे जिसके प्रयोग से बिंदुओं की संख्या ज्ञात होने पर क्षेत्रों की संख्या की प्रागुक्ति कर सकते हैं। आप स्मरण कर सकते हैं कि कक्षा IX में, इस प्रकार के बुद्धिमत्ता पूर्ण अनुमान को 'कंजेक्चर' कहा गया है।

मान लीजिए आपका कंजेक्चर यह है कि यदि वृत्त पर 'n' बिंदु दिए हुए हैं, तो इन बिंदुओं को समस्त संभव रेखाओं से मिलाने पर 2^{n-1} परस्पर अपवर्जी क्षेत्र बनते हैं। यह एक तर्कसंगत अनुमान लगता है। यह देखा जा सकता है कि यदि $n = 5$, तो हमें 16 क्षेत्र प्राप्त होते हैं। अत: 5 बिंदुओं के लिए इस सूत्र को सत्यापित कर लेने के बाद क्या आप संतुष्ट हैं कि किन्हीं भी n बिंदुओं के लिए 2^{n-1} क्षेत्र होते हैं? यदि ऐसा है, तो यदि कोई व्यक्ति आपसे यह पूछे कि आप $n = 25$ के लिए इसे कैसे सुनिश्चित कर सकते हैं, तो आपकी प्रतिक्रिया क्या होगी? ऐसे प्रश्नों का उत्तर प्राप्त करने के लिए आपको एक ऐसी उपपत्ति की आवश्यकता होती है जो निस्संदेह यह प्रदर्शित करती हो कि यह परिणाम सत्य है या यह प्रदर्शित करने के लिए कि कुछ 'n' के लिए यह परिणाम असफल हो जाता है, एक प्रत्युदाहरण होना चाहिए। वास्तव में, यदि आपमें धैर्य है और $n = 6$ पर इसे ज्ञात करने का प्रयास करें तो पाएँगे कि $n = 6$ पर 31 क्षेत्र होते हैं और $n = 7$ पर 57 क्षेत्र होते हैं। अत: ऊपर के कंजेक्चर का $n = 6$ एक प्रत्युदाहरण है। यह तथ्य प्रत्युदाहरण (Counter example) की शक्ति को प्रदर्शित करता है। आपको याद होगा कि कक्षा IX में इस बात पर चर्चा की गई है कि किसी **कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए एक ही प्रत्युदाहरण पर्याप्त होता है।**

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि $n = 1, 2, 3, 4$ और 5 पर परिणाम का सत्यापन करने के बाद भी हमने क्षेत्रों की संख्या से संबंधित उपपत्ति की आवश्यकता पर बल दिया है। आइए हम कुछ और उदाहरण लें। आप (अध्याय 5 में दिए गए) निम्नलिखित परिणाम से अवश्य परिचित होंगे: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ इसकी मान्यता को स्थापित करने के लिए $n = 1, 2, 3,$ आदि के लिए परिणाम को सत्यापित कर देना ही पर्याप्त नहीं होता है, क्योंकि कुछ ऐसे भी 'n' हो सकते हैं, जिसके लिए यह परिणाम सत्य न हो (जैसा कि ऊपर के उदाहरण में $n = 6$ पर परिणाम असफल हो जाता है)। अत: हमें एक ऐसी उपपत्ति की आवश्यकता होती है जो इसकी सत्यता निस्संदेह स्थापित करे। उच्च कक्षाओं में आप इसकी उपपत्ति के बारे में अध्ययन करेंगे।

अब, आकृति A1.3 पर विचार कीजिए, जहाँ PQ और PR बिंदु P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ हैं।



आकृति A1.3

आप (प्रमेय 10.2 में) यह सिद्ध कर चुके हैं कि PQ = PR है। आप इस प्रकार की अनेक आकृतियाँ खींच कर और संगत स्पर्श रेखाओं की मापी गई लंबाइयों द्वारा प्रत्येक स्थिति में इस परिणाम को केवल सत्यापित करके आप संतुष्ट नहीं हुए थे।

क्या आपको याद है कि उपपत्ति में क्या-क्या था? यह कथनों (जिन्हें मान्य तर्क कहते हैं) के एक अनुक्रम (Squence) से मिल कर बना था, जिसमें प्रत्येक कथन, उपपत्ति में आपूर्व कथनों से या प्रमाणित किए जाने वाले परिणाम से स्वतंत्र पहले सिद्ध किए जा चुके परिणामों से या अभिगृहीतों से या परिभाषाओं से या आपके द्वारा की गई कल्पनाओं से प्राप्त होता है और आप अपनी उपपत्ति को कथन $PQ = PR$ से समाप्त करते हैं अर्थात् उस कथन से जिसे आप सिद्ध करना चाहते थे।

उपपत्ति की रचना करने की यही विधि होती है।

अब हम कुछ उदाहरणों और प्रमेयों पर विचार करेंगे और उनकी उपपत्तियों का विश्लेषण करेंगे जिससे हमें यह अधिक अच्छी तरह समझने में सहायता मिलेगी कि इनकी रचना किस प्रकार की जाती है।

सबसे पहले हम उपपत्ति की तथाकथित 'प्रत्यक्ष' या 'निगमनिक' (deductive) विधि के प्रयोग से प्रारंभ करेंगे। इस विधि में हम अनेक कथन प्रस्तुत करते हैं। **प्रत्येक कथन पिछले कथनों पर आधारित होता है।** यदि प्रत्येक कथन तार्किक रूप से सही है (अर्थात् एक मान्य तर्क है), तो इससे सही निष्कर्ष प्राप्त होता है।

उदाहरण 10 : दो परिमेय संख्याओं का योगफल एक परिमेय संख्या होती है।

हल :

क्र.सं.	कथन	विश्लेषण/टिप्पणी
1.	मान लीजिए x और y परिमेय संख्याएँ हैं।	क्योंकि परिणाम परिमेय संख्याओं के बारे में है, इसीलिए हम x और y से प्रारंभ करते हैं जो कि परिमेय है।
2.	मान लीजिए $x = \frac{m}{n}$, $n \neq 0$ और $y = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ जहाँ m, n, p और q पूर्णांक हैं।	परिमेय संख्याओं की परिभाषा प्रयुक्त करें।
3.	अतः $x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$	क्योंकि परिणाम परिमेय संख्याओं के योगफल के बारे में है, इसलिए हम $x + y$ लेते हैं।

4.	पूर्णांकों के गुणधर्मों को लागू करने पर हम देखते हैं कि $mq + np$ और nq पूर्णांक हैं।	पूर्णांकों के ज्ञात गुणधर्मों के प्रयोग करने पर।
5.	क्योंकि $n \neq 0$ और $q \neq 0$, इसलिए $nq \neq 0$.	पूर्णांकों के ज्ञात गुणधर्मों का प्रयोग करके।
6.	अतः, $x + y = \dfrac{mq + np}{nq}$ एक परिमेय संख्या है।	परिमेय संख्या की परिभाषा का प्रयोग करके।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि ऊपर की उपपत्ति का प्रत्येक कथन पहले से स्थापित किए गए तथ्य या परिभाषा पर आधारित है।

उदाहरण 11 : 3 से बड़ी प्रत्येक अभाज्य संख्या $6k + 1$ या $6k + 5$ के रूप की होती है, जहाँ k एक पूर्णांक है।

हल :

क्र.सं.	कथन	विश्लेषण/टिप्पणी
1.	मान लीजिए p, 3 से बड़ी एक अभाज्य संख्या है।	क्योंकि परिणाम का संबंध 3 से बड़ी एक अभाज्य संख्या से है, इसलिए सबसे पहले हम इस प्रकार की संख्या से प्रारंभ करते हैं।
2.	p को 6 से भाग देने पर हम यह देखते हैं कि p का रूप $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, या $6k + 5$ हो सकता है, जहाँ k एक पूर्णांक है।	यूक्लिड की विभाजन-प्रमेयिका का प्रयोग करने पर
3.	परंतु $6k = 2(3k)$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k + 2)$ और $6k + 3 = 3(2k + 1)$ अतः ये अभाज्य संख्याएँ नहीं है।	अब हम शेषफलों का विश्लेषण करेंगे जबकि p एक अभाज्य संख्या हो।
4.	अतः p को अनिवार्यतः $6k + 1$ या $6k + 5$ के रूप का होना होगा, जहाँ k एक पूर्णांक है।	अन्य विकल्पों का निराकरण करने के बाद हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं।

टिप्पणी : ऊपर के उदाहरण में विभिन्न विकल्पों का निराकरण कर लेने के बाद हम निष्कर्ष पर पहुँचते हैं। इस विधि को कभी-कभी नि:शेषण द्वारा उपपत्ति (proof by exhaustion) कहा जाता है।

प्रमेय A1.1 ***(पाइथागोरस-प्रमेय का विलोम):***
यदि एक त्रिभुज की एक भुजा की लंबाई का वर्ग अन्य दो भुजाओं की लंबाइयों के वर्गों के योगफल के बराबर हो, तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

उपपत्ति :

आकृति A1.4

क्र.सं.	कथन	विश्लेषण
1.	मान लीजिए ΔABC परिकल्पना $AC^2 = AB^2 + BC^2$ को संतुष्ट करती है।	क्योंकि हम इस प्रकार के त्रिभुज से संबंधित कथन को सिद्ध कर रहे हैं, इसलिए हम इसी को लेकर प्रारंभ करते हैं।
2.	AB पर लंब रेखा BD की रचना कीजिए इस प्रकार कि $BD = BC$ हो और A को D से मिलाइए।	यह वह अंर्तज्ञान वाला चरण है, जिसके बारे में हम कह चुके हैं कि इसकी आवश्यकता हमें प्रमेयों को सिद्ध करने में प्राय: होगी।
3.	रचना के अनुसार ΔABD एक समकोण त्रिभुज है, और पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार $AD^2 = AB^2 + BD^2$	हम पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करते हैं जिसे पहले सिद्ध किया जा चुका है।
4.	रचना के अनुसार $BD = BC$ है। अत: $AD^2 = AB^2 + BC^2$.	तर्कसंगत निगमन (deduction)
5.	अत: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	कल्पना और पिछले कथन को लागू करने पर
6.	क्योंकि AC और AD धनात्मक है, इसलिए $AC = AD$	संख्याओं के ज्ञात गुणधर्म को लागू करने पर

7.	अभी ही हमने यह दर्शाया है कि AC = AD और रचना के अनुसार BC = BD और AB उभयनिष्ठ है। अत: SSS के अनुसार $\Delta ABC \cong \Delta ABD$	ज्ञात प्रमेय लागू करने पर
8.	क्योंकि $\Delta ABC \cong \Delta ABD$, इसलिए $\angle ABC = \angle ABD$ जो कि एक समकोण है	पहले स्थापित तथ्य के आधार पर तर्कसंगत निगमन ■

टिप्पणी : ऊपर दिए गए प्रत्येक परिणाम को एक-दूसरे से शृंखलित चरणों के अनुक्रम से सिद्ध किया गया है। इनके क्रम का महत्त्व है। उपपत्ति का प्रत्येक चरण पिछले चरणों और पहले ज्ञात किए गए परिणामों से प्राप्त होता है (प्रमेय 6.9 भी देखिए)।

प्रश्नावली A1.3

नीचे दिए गए प्रत्येक प्रश्न में आपको एक कथन सिद्ध करने के लिए कहा गया है। प्रत्येक उपपत्ति में प्रयोग किए गए सभी चरण बताइए और प्रत्येक चरण के लिए कारण बताइए।

1. सिद्ध कीजिए कि दो क्रमागत विषम संख्याओं का योगफल, 4 से भाज्य होता है।

2. दो क्रमागत विषम संख्याएँ लीजिए। उनके वर्गों का योगफल ज्ञात कीजिए और तब प्राप्त परिणाम में 6 जोड़ दीजिए। सिद्ध कीजिए कि इस तरह प्राप्त की गई नई संख्या सदा ही 8 से भाज्य होती है।

3. यदि $p \geq 5$ एक अभाज्य संख्या हो तो दिखाइए कि $p^2 + 2$, संख्या 3 से भाज्य है।
[**संकेत:** उदाहरण 11 का प्रयोग कीजिए।]

4. मान लीजिए x और y परिमेय संख्याएँ हैं। दिखाइए कि xy एक परिमेय संख्या है।

5. यदि a और b धन पूर्णांक हों, तो आप जानते हैं कि $a = bq + r, 0 \leq r < b$, जहाँ q एक पूर्ण संख्या है। सिद्ध कीजिए HCF (a, b) = HCF (b, r)
[**संकेत :** मान लीजिए HCF$(b, r) = h$ है। अत: $b = k_1h$ और $r = k_2h$, जहाँ k_1 और k_2 असहभाज्य (co-prime) हैं।]

6. त्रिभुज ABC की भुजा BC की एक समांतर रेखा भुजाओं AB और AC को क्रमश: D और E पर काटती है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

A1.5 कथन का निषेध (Negation)

इस भाग में हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि किसी कथन का 'निषेध' करने का क्या अर्थ है, परंतु चर्चा प्रारंभ करने से पहले हम आपको कुछ संकेतन से परिचित करा देना चाहते

हैं, जिनकी सहायता से हम इन संकल्पनाओं को सरलता से समझ सकते हैं। आइए सबसे पहले हम एक कथन को एक एकल इकाई के रूप में लें और उसे एक नाम दे दें। उदाहरण के लिए हम कथन '1 सितंबर, 2005 को दिल्ली में वर्षा हुई थी' को p से प्रकट कर सकते हैं। इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं

p: 1 सितंबर, 2005 को दिल्ली में वर्षा हुई थी।

इसी प्रकार आइए हम यह भी लिख लें।

q: सभी अध्यापक महिलाएँ हैं।

r: माइक के कुत्ते की पूँछ काली है।

s: $2 + 2 = 4$.

t: त्रिभुज ABC समबाहु त्रिभुज है।

यह संकेतन हमें कथनों के गुणधर्मों के बारे में चर्चा करने में सहायता करती है और इस बात में भी सहायता करती है कि हम उन्हें किस प्रकार संयोजित कर सकते हैं। प्रारंभ में उन कथनों का अध्ययन करेंगे, जिन्हें हम 'सरल' कथन कहते हैं और तदुपरांत 'मिश्र' कथनों का अध्ययन करेंगे।

आइए अब हम निम्नलिखित सारणी पर विचार करें जिसमें हम दिए हुए प्रत्येक कथन से एक नया कथन की रचना करेंगे।

मूल कथन	नया कथन
p: 1 सितंबर 2005 को दिल्ली में वर्षा हुई थी।	$\sim p$: यह असत्य है कि 1 सितंबर, 2005 को दिल्ली में वर्षा हुई थी।
q: सभी अध्यापक महिला हैं।	$\sim q$: यह असत्य है कि सभी अध्यापक महिला हैं।
r: माइक के कुत्ते की पूँछ काली है।	$\sim r$: यह असत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली है।
s: $2 + 2 = 4$	$\sim s$: यह असत्य है कि $2 + 2 = 4$
t: त्रिभुज ABC समबाहु है।	$\sim t$: यह असत्य है कि त्रिभुज ABC समबाहु है।

सारणी में दिया गया प्रत्येक नया कथन संगत पुराने कथन का *निषेध* (negation) है। अर्थात् $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ और $\sim t$ क्रमशः कथनों p, q, r, s और t के निषेध हैं। यहाँ $\sim p$ को

'नहीं p' (not p) पढ़ा जाता है। कथन $\sim p$, उस निश्चयात्मक कथन (assertion) का निषेध करता है जिसे कथन p कहता है। ध्यान दीजिए कि अपनी सामान्य बातचीत में $\sim p$ का अर्थ यह है कि '1 सितंबर, 2005 को दिल्ली में वर्षा नहीं हुई थी।' फिर भी, ऐसा करते समय हमें सावधानी बरतने की आवश्यकता होती है। आप संभवत: यह सोच सकते हैं कि दिए हुए कथन में किसी उपयुक्त स्थान पर केवल शब्द 'नहीं' लगा देने से ही कथन का निषेध प्राप्त किया जा सकता है। यद्यपि यह क्रिया 'p' के संबंध में तो लागू हो जाती है, परंतु कठिनाई तब होती है जबकि हमारा कथन शब्द 'सभी' से प्रारंभ होता है। उदाहरण के लिए कथन q: सभी अध्यापक महिला हैं पर विचार कीजिए। हमने यह कहा है कि इस कथन का निषेध $\sim q$: यह असत्य है कि सभी अध्यापक महिला होती हैं। यह इस कथन के ही समान है कि 'कुछ अध्यापक ऐसे हैं जो पुरुष हैं।' आइए अब यह देखें कि जब हम q में केवल 'नहीं' लगा देते हैं तब क्या होता है। तब हमें यह कथन प्राप्त होता है कि "सभी अध्यापक महिला नहीं हैं" या हम यह कथन प्राप्त कर सकते हैं कि "नहीं हैं सभी अध्यापक महिला"। पहले कथन से लोग भ्रम में पड़ सकते हैं, इससे यह अर्थ निकलता है कि सभी अध्यापक पुरुष हैं (यदि हम शब्द 'सभी' पर बल देते हैं)। यह निश्चय ही q का निषेध नहीं है। तथापि दूसरे कथन से $\sim q$ का अर्थ प्राप्त हो जाता है अर्थात् कम से कम एक अध्यापक ऐसा है जो महिला नहीं है। अत: किसी कथन का निषेध लिखते समय सावधानी बरतने की आवश्यकता होती है।

अब, हम इस बात का निर्णय कैसे करें कि जो निषेध हमने प्राप्त किया है वह सही है या नहीं? इसके लिए हम निम्नलिखित कसौटी का प्रयोग करते हैं।

मान लीजिए p एक कथन है और $\sim p$ इसका निषेध है। तब $\sim p$ असत्य होता है जब कभी p सत्य होता है और $\sim p$ सत्य होता है जब कभी p असत्य होता है।

उदाहरण के लिए, यदि यह सत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली है, तो यह असत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली नहीं है। यदि यह असत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली है, तो यह सत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली नहीं है।

इसी प्रकार कथनों s और t के निषेध ये हैं:

$s : 2 + 2 = 4$; निषेध $\sim s: 2 + 2 \neq 4$

t: त्रिभुज ABC समबाहु है, $\sim t$: त्रिभुज ABC समबाहु नहीं है।

अब, $\sim(\sim s)$ क्या है? यह $2 + 2 = 4$ होगा जो कि s है और $\sim(\sim t)$ क्या है? यह त्रिभुज ABC समबाहु है' अर्थात् t होगा। वस्तुत: यदि कोई कथन $\boldsymbol{p}$ हो, तो $\boldsymbol{\sim(\sim p)}$ स्वयं कथन $\boldsymbol{p}$ होता है।

उदाहरण 12 : निम्नलिखित कथनों के निषेध बताइए:

(i) माइक के कुत्ते की पूँछ काली नहीं है।

(ii) सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं।

(iii) $\sqrt{2}$ अपरिमेय है।

(iv) कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक होती हैं।

(v) सभी अध्यापक पुरुष नहीं हैं।

(vi) कुछ घोड़े भूरे नहीं हैं।

(vii) ऐसी कोई वास्तविक संख्या x नहीं है जिससे कि $x^2 = -1$

हल :

(i) यह असत्य है कि माइक के कुत्ते की पूँछ काली नहीं है अर्थात् माइक के कुत्ते की पूँछ काली है।

(ii) यह असत्य है कि सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ हैं अर्थात् कुछ (कम से कम एक) अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ नहीं हैं। इसे इस प्रकार भी लिखा जा सकता है 'सभी अपरिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ नहीं हैं।'

(iii) यह असत्य है कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय है अर्थात् $\sqrt{2}$ अपरिमेय नहीं है।

(iv) यह असत्य है कि कुछ परिमेय संख्याएँ पूर्णांक होती हैं अर्थात् कोई भी परिमेय संख्या पूर्णांक नहीं है।

(v) यह असत्य है कि सभी अध्यापक पुरुष नहीं हैं अर्थात् सभी अध्यापक पुरुष हैं।

(vi) यह असत्य है कि कुछ घोड़े भूरे नहीं है अर्थात् सभी घोड़े भूरे हैं।

(vii) यह असत्य है कि ऐसी कोई वास्तविक संख्या x नहीं है जिससे कि $x^2 = -1$ अर्थात् कम से कम एक वास्तविक संख्या x है जिससे कि $x^2 = -1$

टिप्पणी : ऊपर की चर्चा से किसी कथन का निषेध प्राप्त करने का निम्नलिखित **कार्यकारी नियम** (working rule) प्राप्त कर सकते हैं:

(i) पहले 'नहीं' के साथ कथन लिखिए।

(ii) यदि कोई भ्रम हो, तो आप कुछ उपयुक्त संशोधन (modification) कर सकते हैं, विशेष रूप से 'सभी' या 'कुछ' से संबंधित कथनों में।

प्रश्नावली A1.4

1. निम्नलिखित कथनों के निषेध लिखिए:

(i) मनुष्य नश्वर (mortal) है।

(ii) रेखा l रेखा m के समांतर है।

(iii) इस अध्याय में अनेक प्रश्नावलियाँ हैं।

(iv) सभी पूर्णांक परिमेय संख्या है।

(v) कुछ अभाज्य संख्याएँ विषम है।

(vi) कोई छात्र आलसी नहीं है।

(vii) कुछ बिल्लियाँ काली नहीं है।

(viii) ऐसी कोई संख्या x नहीं है जिससे कि $\sqrt{x} = -1$

(ix) संख्या 2, धन पूर्णांक a को विभाजित करती है।

(x) पूर्णांक a और b असहभाज्य है।

2. नीचे दिए गए प्रत्येक प्रश्न में दो कथन हैं। बताइए कि दूसरा कथन पहले कथन का निषेध है या नहीं

(i) मुमताज भूखी है,
मुमताज भूखी नहीं है।

(ii) कुछ बिल्लियाँ काली हैं,
कुछ बिल्लियाँ भूरी हैं।

(iii) सभी हाथी विशाल हैं।
एक हाथी विशाल नहीं है।

(iv) सभी अग्निशामक यंत्र लाल हैं।
सभी अग्निशामक यंत्र लाल नहीं हैं।

(v) कोई आदमी गाय नहीं है।
कुछ आदमी गाय हैं।

A1.6 कथन का विलोम

अब हम एक कथन के विलोम की अभिधारणा (notion) का पता लगाएँगे। इसके लिए हमें 'मिश्र (compound)' कथन की अर्थात् एक ऐसे कथन की आवश्यकता होती है जो एक या अधिक 'सरल' कथनों का संयोजन होता है। ऐसे तो मिश्र कथन बनाने की अनेक विधियाँ हैं, परंतु यहाँ हम उन विधियों पर ध्यान केंद्रित करेंगे जो शब्दों 'यदि' और 'तो' के प्रयोग द्वारा दो सरल कथनों को जोड़कर प्राप्त किए जाते हैं। उदाहरण के लिए कथन

कथन 'यदि वर्षा हो रही है, तो साइकिल से जाना कठिन है' निम्नलिखित दो कथनों से बना है।

p: वर्षा हो रही है।

q: साइकिल से जाना कठिन।

पूर्व में बताए गए संकेतन का प्रयोग करके हम यह कह सकते हैं: यदि p, तो q है। हम यह भी कह सकते हैं कि 'p से तात्पर्य q प्राप्त होता है'। और इसे हम $p \Rightarrow q$ से प्रकट करते हैं।

अब, मान लीजिए कि कथन यह है कि 'यदि पानी की टंकी काली है, तो इसमें पीने का पानी है।' यह $p \Rightarrow q$ के रूप का है जहाँ परिकल्पना p है (पानी की टंकी काली है) और निष्कर्ष q है (टंकी में पीने का पानी है)। मान लीजिए हम परिकल्पना और निष्कर्ष का

विनिमय (Interchange) कर दें, तब ऐसी स्थिति में हमें क्या प्राप्त होता है? हमें $q \Rightarrow p$ प्राप्त होता है अर्थात् यदि टंकी में पीने वाला पानी है, तो टंकी अवश्य काली होगी। इस कथन को कथन $p \Rightarrow q$ का **विलोम** (converse) कहते हैं।

व्यापक रूप में कथन $p \Rightarrow q$ का **विलोम** $q \Rightarrow p$ होता है जहाँ p और q कथन हैं। ध्यान दीजिए कि $p \Rightarrow q$ और $q \Rightarrow p$ एक-दूसरे के विलोम हैं।

उदाहरण 13 : निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए:

(i) यदि जमीला साइकिल चला रही है, तो 17 अगस्त रविवार को पड़ता है।

(ii) यदि 17 अगस्त रविवार है, तो जमीला साइकिल चला रही है।

(iii) यदि पौलिने क्रोधित होती है, तो उसका चेहरा लाल हो जाता है।

(iv) यदि एक व्यक्ति के पास शिक्षा में स्नातक की डिग्री है, तो उसे शिक्षण की अनुमति होती है।

(v) यदि एक व्यक्ति को वायरल संक्रमण है, तो उसे तेज बुखार होता है।

(vi) यदि अहमद मुंबई में है, तो वह भारत में है।

(vii) यदि त्रिभुज ABC समबाहु है, तो उसके सभी अंत:कोण बराबर होते हैं।

(viii) यदि x एक अपरिमेय संख्या है, तो x का दशमलव प्रसार अनवसानी (non-terminating) अनावर्ती (non-recurring) होता है।

(ix) यदि $x - a$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखंड है, तो $p(a) = 0$.

हल : ऊपर दिया गया प्रत्येक कथन $p \Rightarrow q$ के रूप का है। अत: विलोम ज्ञात करने के लिए पहले हम p और q को पहचानते हैं और तब $q \Rightarrow p$ लिखते हैं।

(i) p: जमीला साइकिल चला रही है और q: 17 अगस्त रविवार को पड़ता है। अत: विलोम यह है यदि 17 अगस्त रविवार को पड़ता है, तो जमीला साइकिल चला रही है।

(ii) यह (i) का विलोम है। अत: इसका विलोम ऊपर (i) में दिया गया कथन है।

(iii) यदि पौलीन का चेहरा लाल हो जाता है, तो वह क्रोधित है।

(iv) यदि एक व्यक्ति को पढ़ाने की अनुमति है, तो उसके पास शिक्षा में स्नातक की डिग्री है।

(v) यदि एक व्यक्ति को तेज बुखार है तो, उसे वायरल संक्रमण है।

(vi) यदि अहमद भारत में है, तो वह मुंबई में है।

(vii) यदि त्रिभुज ABC के सभी अंत:कोण बराबर हैं, तो वह समबाहु त्रिभुज है।

(viii) यदि x का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती है, तो x एक परिमेय संख्या है।

(ix) यदि $p(a) = 0$, तो $x - a$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखंड है।

ध्यान दीजिए कि इस बात की चिंता किए बिना कि कथन सत्य है या असत्य, हमने ऊपर दिए गए प्रत्येक कथन का केवल विलोम लिख दिया है। उदाहरण के लिए निम्नलिखित कथन पर विचार कीजिए। यदि अहमद मुंबई में है, तो वह भारत में है। यह कथन सत्य है। आइए अब हम इसका विलोम लें। यदि अहमद भारत में है, तो वह मुंबई में है। यह आवश्यक नहीं है कि यह सदा सत्य ही हो–वह भारत के किसी भी भाग में हो सकता है।

गणित में, विशेष रूप से ज्यामिति में आपको ऐसी अनेक स्थितियाँ मिलती हैं, जहाँ $p \Rightarrow q$ सत्य होता है और आपको यह निर्णय लेना होता है कि क्या विलोम अर्थात् $q \Rightarrow p$ भी सत्य है।

उदाहरण 14 : निम्नलिखित कथनों के विलोम बताइए। प्रत्येक स्थिति में यह भी निर्णय लीजिए कि विलोम सत्य है या असत्य।

(i) यदि n एक सम पूर्णांक है, तो $2n + 1$ एक विषम पूर्णांक होता है।

(ii) यदि एक वास्तविक संख्या का दशमलव-प्रसार सांत (terminating) है, तो संख्या परिमेय है।

(iii) यदि एक तिर्यक् छेदी रेखा (transversal) दो समांतर रेखाओं को काटती है, तो संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।

(iv) यदि एक चतुर्भुज की सम्मुख-भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है।

(v) यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम है, तो उनके संगत कोण बराबर होते हैं।

हल :

(i) विलोम यह है कि 'यदि $2n + 1$ एक विषम पूर्णांक है, तो n एक सम पूर्णांक होता है।' यह एक असत्य कथन है (उदाहरण के लिए $15 = 2(7) + 1$, और 7 विषम है।)

(ii) 'यदि एक वास्तविक संख्या परिमेय है, तो इसका दशमलव प्रसार सांत होता है।' यह विलोम है। यह एक असत्य कथन है। क्योंकि परिमेय संख्या का एक अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार भी हो सकता है।

(iii) विलोम यह है कि 'यदि एक तिर्यक छेदी रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार काटती हो कि संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर हो, तो दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं'। कक्षा IX की पाठ्यपुस्तक के अभिगृहीत 6.4 के अनुसार हमने यह मान लिया है कि यह कथन सत्य है।

(iv) 'यदि एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज हो, तो इसके सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म

बराबर होता है।' यह विलोम है। यह सत्य है (प्रमेय 8.1, कक्षा IX)।

(v) 'यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों, तो वे सर्वांगसम होते हैं' विलोम है। यह कथन असत्य है। यह हम आप पर छोड़ रहे हैं कि आप इनके लिए एक उपयुक्त प्रत्युदाहरण ज्ञात करें।

प्रश्नावली A1.5

1. निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए

(i) यदि टोकियो में गर्मी हो, तो शरन के शरीर से अधिक पसीना निकलने लगता है।

(ii) यदि शालिनी भूखी हो, तो उसका पेट कुड़कुड़ाने लगता है।

(iii) यदि यशवंत को छात्र-वृत्ति मिल रही हो, तो उसे एक डिग्री मिल सकती है।

(iv) यदि पौधे में फूल लगे हुए हों, तो वह सजीव होता है।

(v) यदि जानवर एक बिल्ली है, तो इसकी एक पूँछ होती है।

2. निम्नलिखित कथनों के विलोम लिखिए। प्रत्येक स्थिति में यह बताइए कि विलोम सत्य है या असत्य

(i) यदि त्रिभुज ABC समद्विबाहु हो, तो इसके आधार कोण बराबर होते हैं।

(ii) यदि एक पूर्णांक विषम हो, तो इसका वर्ग एक विषम पूर्णांक होता है।

(iii) यदि $x^2 = 1$, तो $x = 1$

(iv) यदि ABCD एक समांतर चतुर्भुज हो, तो AC तथा BD एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(v) यदि a, b और c पूर्ण संख्याएँ हैं, तो $a + (b + c) = (a + b) + c$

(vi) यदि x और y दो विषम संख्याएँ हैं, तो $x + y$ एक सम संख्या होती है।

(vii) यदि एक समांतर चतुर्भुज PQRS के शीर्ष बिंदु एक वृत्त पर स्थित हों, तो वह एक आयत होता है।

A1.7 विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति

अभी तक आपने सभी उदाहरणों में परिणामों की सत्यता स्थापित करने के लिए प्रत्यक्ष तर्क का प्रयोग किया था। अब हम 'परोक्ष' तर्कों विशेषरूप से 'विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति' (proof by conrtradiction) नामक गणित के एक अति शक्तिशाली साधन का पता लगाएँगे। हम इस विधि का प्रयोग अध्याय 1 में अनेक संख्याओं की अपरिमेयता स्थापित करने और अन्य अध्यायों में कुछ प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए कर चुके हैं। यहाँ हम इस अभिधारणा को स्पष्ट करने के लिए अनेक उदाहरण लेंगे।

आगे अध्ययन करने से पहले आइए हम इस बात पर चर्चा करें कि विरोधोक्ति क्या है। गणित में विरोध तब होता है जबकि हमें एक ऐसा कथन p प्राप्त होता है कि p सत्य होता है और इसका निषेध $\sim p$ भी सत्य होता है। उदाहरण के लिए,

p: , जहाँ a और b असहभाज्य संख्याएँ हैं।

q: संख्या 2 `$a$' और `b' दोनों को विभाजित करती है।

यदि हम यह मान लें कि p सत्य है और हम यह भी दर्शा सकें कि q भी सत्य है, तो, हमें एक विरोधोक्ति प्राप्त होती है क्योंकि q का यह तात्पर्य है कि p का निषेध सत्य है। यदि आपको याद हो कि यही बात यथातथ्य तब घटी थी जब हम यह सिद्ध करने का प्रयास कर रहे थे कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय है (देखिए अध्याय 1)।

विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति किस प्रकार कार्य करती है? आइए एक विशिष्ट उदाहरण लेकर इस पर हम विचार करें। मान लीजिए निम्नलिखित दिया हुआ है:

सभी महिलाएँ नश्वर होती हैं। A एक महिला है। सिद्ध कीजिए कि महिला A नश्वर है।

यद्यपि यह एक सरल उदाहरण है, फिर भी आइए हम देखें कि विरोधोक्ति से इसे हम कैसे सिद्ध कर सकते हैं।

- आइए हम यह मान लें कि हम कथन p की सत्यता स्थापित करना चाहते हैं (यहाँ हम यह दर्शाना चाहते हैं कि p :'महिला A नश्वर है' सत्य है)
- अत: सबसे पहले हम यह मान लेते हैं कि कथन सत्य नहीं है अर्थात् हम यह मान लेते हैं कि p का निषेध सत्य है। (अर्थात् महिला A नश्वर नहीं है)।
- तब हम p के निषेध की सत्यता पर आधारित अनेक तर्कसंगत निगमन करते हैं। (क्योंकि 'महिला A नश्वर नहीं है' इसलिए हमें कथन 'सभी महिलाएँ नश्वर हैं' का एक प्रत्युदाहरण प्राप्त हो जाता है। अत: यह असत्य है कि सभी महिलाएँ नश्वर हैं)।
- यदि इससे विरोधोक्ति उत्पन्न होती है, तो यह विरोधोक्ति हमारी दोषपूर्ण मान्यता कि 'p सत्य नहीं है' के कारण होता है। (यह एक विरोधोक्ति है क्योंकि हमने यह दर्शाया है कि कथन 'सभी महिलाएँ नश्वर है' और इसका निषेध कि 'सभी महिलाएँ नश्वर नहीं हैं', सत्य है। यह विरोधोक्ति (Contradiction) इसलिए होती है, क्योंकि हम यह मानकर चले थे कि A नश्वर नहीं है।)।
- अत: हमारी कल्पना गलत है अर्थात् p को सत्य होना ही है (अत: A नश्वर है)।

उदाहरण 15 : एक शून्येतर (non-zero) परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल अपरिमेय होता है।

हल :

कथन	विश्लेषण/टिप्पणी
हम विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करेंगे। मान लीजिए r एक शून्येतर परिमेय संख्या है और x एक अपरिमेय संख्या है। मान लीजिए, $r = \frac{m}{n}$ जहाँ m, n पूर्णांक है और $m \neq 0$, $n \neq 0$ हमें यह सिद्ध करना है कि rx अपरिमेय है।	
मान लीजिए rx परिमेय है।	यहाँ हम उस कथन का निषेध सत्य मान ले रहे हैं जिसे हमें सिद्ध करना है।
तब, $rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, जहाँ p और q पूर्णांक है।	यह पिछले कथन और परिमेय संख्या की परिभाषा से प्राप्त होता है।
समीकरण $rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, और $r = \frac{m}{n}$, का प्रयोग करने पर हमें $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$ प्राप्त होता है।	
क्योंकि np और mq पूर्णांक हैं और $mq \neq 0$, इसलिए x एक परिमेय संख्या है।	पूर्णांकों के गुणधर्मों और परिमेय संख्या की परिभाषा का प्रयोग करने पर
यह एक विरोधोक्ति है क्योंकि हमने x को परिमेय दिखाया है, परंतु हमारी परिकल्पना के अनुसार x अपरिमेय है।	इसी विरोधोक्ति को हम ढूँढ़ रहे थे।
विरोधोक्ति इस दोषपूर्ण कल्पना, कि rx परिमेय है के कारण होता है।	तर्कसंगत निगमन

अब हम उदाहरण 11 सिद्ध करेंगे, परंतु इस बार हम विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करेंगे। परिणाम नीचे दिया गया है।

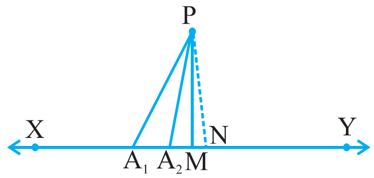
कथन	**विश्लेषण/टिप्पणी**
आइए हम यह मान लें कि कथन सत्य नहीं है।	जैसाकि हम पहले देख चुके हैं कि यह विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति की सहायता से तर्क देने का प्रारंभ है।
अत: हम यह मान लेते हैं कि एक ऐसी अभाज्य संख्या $p > 3$ होती है जो $6n + 1$ या $6n + 5$ के रूप का होता है, जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।	यह परिणाम के कथन का निषेध है।
6 के भाग पर यूक्लिड की विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करने और इस तथ्य का प्रयोग करने पर कि p, $6n + 1$ या $6n + 5$ के रूप का नहीं है, हमें $p = 6n$ या $6n + 2$ या $6n + 3$ या $6n + 4$ प्राप्त होता है।	पहले सिद्ध किए गए परिणामों का प्रयोग करने पर।
अत: p या तो 2 या 3 से भाज्य है।	तर्कसंगत निगमन
इसलिए, p अभाज्य नहीं है।	तर्कसंगत निगमन
यह एक विरोधोक्ति है, क्योंकि हमारी परिकल्पना के अनुसार p अभाज्य है।	तथ्यत: हम यही चाहते हैं
विरोधोक्ति इसलिए होती है क्योंकि हम यह मानकर चले थे कि एक ऐसी अभाज्य संख्या $p > 3$ होती है, जो $6n + 1$ या $6n + 5$ के रूप की नहीं होती।	
परिणामत: 3 से बड़ी प्रत्येक अभाज्य संख्या $6n + 1$ या $6n + 5$ रूप की है।	यह निष्कर्ष प्राप्त करते हैं।

■

टिप्पणी : ऊपर की उपपत्ति के उदाहरण से यह पता चलता है कि एक परिणाम को अनेक विधियों से सिद्ध किया जा सकता है।

प्रमेय A1.2 : *एक बिंदु से उस रेखा के, जो उस बिंदु से होकर नहीं जाती है, बिंदुओं को मिलाने वाले सभी रेखा-खंडों में लघुतम रेखा-खंड रेखा पर लंब होता है।*

उपपत्ति :



आकृति A1.5

कथन	विश्लेषण/टिप्पणी
मान लीजिए XY दी हुई रेखा है, P एक बिंदु है, जो XY पर स्थित नहीं है और PM, PA_1, PA_2, . . . आदि, बिंदु P से रेखा XY के बिंदुओं तक खींचे गए रेखा-खंड है जिनमें PM लघुतम रेखा-खंड है (आकृति A 1.5 देखिए)	क्योंकि हमें यह सिद्ध करना है कि सभी रेखा-खंडों PM, PA_1, PA_2, . . . आदि में लघुतम रेखा-खंड, XY पर लंब होता है, अत: सबसे पहले हम इन रेखा-खंडों को लेते हैं।
मान लीजिए PM, XY पर लंब नहीं है।	यह विरोधोक्ति द्वारा सिद्ध किए जाने वाले कथन का निषेध है।
रेखा XY पर PN लंब डालिए, जैसाकि आकृति A1.5 में बिंदुकित रेखा से दिखाया गया है।	परिणामों को सिद्ध करने के लिए हमें प्राय: रचना करने की आवश्यकता पड़ती है।
सभी रेखा-खंडों PM, PN, PA_1, PA_2, . . आदि में PN लघुतम रेखा-खंड है, जिसका अर्थ यह है कि $PN < PM$	समकोण त्रिभुज की भुजा कर्ण से छोटी होती है और संख्याओं के ज्ञात गुणधर्म।
यह हमारे इस परिकल्पना की विरोधोक्ति है कि ऐसी सभी रेखा-खंडों में PM लघुतम रेखा-खंड है।	यथातथ्य हम यही चाहते हैं।
अत: रेखा-खंड PM, XY पर लंब है।	हम निष्कर्ष पर आ जाते हैं।

प्रश्नावली A1.6

1. मान लीजिए $a + b = c + d$, और $a < c$, तो विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करके यह दिखाइए कि $b > d$

2. मान लीजिए r एक परिमेय संख्या है और x एक अपरिमेय संख्या है। विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करके यह दिखाइए कि $r + x$ एक अपरिमेय संख्या है।

3. विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करके यह सिद्ध कीजिए कि यदि किसी पूर्णांक a के लिए a^2 सम है, तो a भी सम होता है।

[**संकेत :** मान लीजिए a सम नहीं है, अर्थात् यह $2n + 1$ के रूप का है, जहाँ n एक पूर्णांक है और तब आगे बढ़िए।]

4. 'विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति' का प्रयोग करके यह सिद्ध कीजिए कि यदि पूर्णांक a के लिए a^2, 3 से भाज्य हो, तो a, भी 3 से भाज्य है।

5. विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति का प्रयोग करके यह दिखाइए कि n का ऐसा कोई मान नहीं होता जिसके लिए 6^n का अंतिम अंक शून्य हो।

6. विरोधोक्ति का प्रयोग करके यह सिद्ध कीजिए कि एक समतल की दो रेखाएँ एक से अधिक बिंदु पर प्रतिच्छेद नहीं कर सकती हैं।

A1.8 सारांश

इस परिशिष्ट में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. किसी उपपत्ति के विभिन्न अवयव (ingredients) और कक्षा 9 में पढ़ी गई अन्य संबंधित संकल्पनाएँ।

2. किसी कथन का निषेध।

3. किसी कथन का विलोम।

4. विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति।

गणितीय निदर्शन (Mathematical Modelling) A2

A2.1 भूमिका

- एक वयस्क मानव शरीर में लगभग 1,50,000 किमी लंबी धमनियाँ और शिराएँ होती हैं जिनमें रक्त प्रवाहित होता है।
- मनुष्य का हृदय शरीर में प्रति 60 सेकंड में 5 से 6 लीटर तक रक्त पंप करता रहता है।
- सूर्य की सतह का तापमान लगभग 6000° C है।

क्या आपको यह जानकर आश्चर्य हुआ है कि किस प्रकार हमारे वैज्ञानिक और गणितज्ञ इन परिणामों का आकलन कर सके हैं? क्या उन्होंने कुछ वयस्कों के मृत शरीरों से धमनियों और शिराओं को बाहर निकाल कर इनकी लंबाई मापी है? क्या हृदय द्वारा प्रति सेकंड पंप किए गए रक्त की मात्रा ज्ञात करने के लिए शरीर से रक्त को बाहर निकाला है? क्या सूर्य की सतह का तापमान ज्ञात करने के लिए उन्होंने अपने साथ थर्मामीटर लेकर सूर्य तक की यात्रा की है? निश्चित ही ऐसा नहीं हुआ है। तब प्रश्न उठता है कि उन्होंने इन आँकड़ों को किस तरह प्राप्त किया है।?

निश्चय ही इसका उत्तर **गणितीय निदर्शन** (Mathematics modelling) में निहित है, जिससे हम आपको कक्षा IX में परिचित करा चुके हैं। आपको याद होगा कि गणितीय निदर्शन वास्तविक जीवन से जुड़ी किसी स्थिति का गणितीय विवरण होता है और आपको यह भी याद होगा कि गणितीय निदर्शन किसी समस्या का गणितीय निदर्श प्राप्त करने का एक प्रक्रम है। साथ ही समस्या का विश्लेषण करने और हल करने में इसका प्रयोग किया जाता है।

अत: गणितीय निदर्शन में, हम वास्तविक जगत से जुड़ी किसी समस्या को लेते हैं और उसे हम एक तुल्य गणितीय समस्या में रूपांतरित कर देते हैं। तब हम गणितीय समस्या हल

करते हैं और इसके हल की व्याख्या वास्तविक जगत् से जुड़ी समस्या के साथ करते हैं। और तब यह देखना आवश्यक है कि प्राप्त हल अर्थपूर्ण है, जो निदर्श (Model) के मान्यकरण (validating) का एक चरण है। कुछ उदाहरण जहाँ गणितीय निदर्शन अत्यंत महत्वपूर्ण है, नीचे दिए हैं:

(i) एक ऐसे स्थान पर किसी नदी की गहराई और चौड़ाई ज्ञात करना जहाँ पहुँचा नहीं जा सकता है।

(ii) पृथ्वी और अन्य ग्रहों का द्रव्यमान आकलित करना।

(iii) पृथ्वी और किसी अन्य ग्रह के बीच की दूरी आकलित करना।

(iv) किसी देश में मानसून के आने की प्रागुक्ति करना।

(v) स्टॉक मार्केट की प्रवृत्ति (Trend) की प्रागुक्ति करना।

(vi) किसी व्यक्ति के शरीर में रक्त का आयतन आकलित करना।

(vii) 10 वर्ष बाद किसी नगर की जनसंख्या की प्रागुक्ति करना।

(viii) किसी पेड़ की पत्तियों की संख्या आकलित करना।

(ix) किसी नगर के वायुमंडल में उपस्थित विभिन्न प्रदूषकों का ppm आकलित करना।

(x) पर्यावरण पर प्रदूषकों का प्रभाव आकलित करना।

(xi) सूर्य की सतह का तापमान आकलित करना।

इस अध्याय में हम गणितीय निदर्शन के प्रक्रम पर पुन:विचार करेंगे और इसे स्पष्ट करने के लिए हम अपने आस-पास के के जगत् से जुड़े कुछ उदाहरण लेगें। अनुच्छेद A2.2 में हम एक निदर्श के निर्माण से संबंधित सभी चरणों से आपको परिचित कराएँगे। अनुच्छेद A2.3 में हम विभिन्न प्रकार के उदाहरणों पर चर्चा करेंगे। अनुच्छेद A2.4 में, हम गणितीय निदर्शन के महत्त्व से संबंधित कारणों पर विचार करेंगे।

यहाँ यह स्मरण रहे कि हमारा लक्ष्य उस महत्वपूर्ण विधि के प्रति आपको जागरूक करना है, जिसमें गणित वास्तविक जगत् से जुड़ी समस्याओं को हल करने में सहायक होती है। फिर भी गणितीय निदर्शन के महत्त्व को वास्तव में समझने के लिए आपको गणित का कुछ और ज्ञान होना आवश्यक होता है। उच्च कक्षाओं में आपको इससे संबंधित कुछ उदाहरण देखने को मिलेंगे।

A2.2 गणितीय निदर्शन के चरण

कक्षा IX में, हमने निदर्शन के प्रयोग से संबंधित कुछ उदाहरणों पर विचार किया था। क्या इन उदाहरणों से आपको प्रक्रम और इससे संबंधित चरणों की कुछ सूक्ष्म जानकारी प्राप्त हुई थी? आइए हम गणितीय निदर्शन से संबंधित मुख्य चरणों पर पुन:विचार करें।

चरण 1 **(समस्या समझना)** वास्तविक समस्या परिभाषित कीजिए और यदि आप एक समूह में काम कर रहे हैं, तो उन समस्याओं पर विचार कीजिए जिन्हें आप समझना चाहते हैं। कुछ कल्पनाएँ करके और कुछ कारकों की उपेक्षा करके समस्या को प्रबंध योग्य कीजिए जिससे कि समस्या का प्रबंधन किया जा सके।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए हमारी समस्या एक झील में मछलियों की संख्या आकलित करना है। यहाँ यह संभव नहीं है कि प्रत्येक मछली को पकड़ कर बाहर निकाला जाए और फिर उनकी गिनती की जाए। ऐसी स्थिति में हम संभवत: एक प्रतिदर्श (Sample) ले सकते हैं और इसकी सहायता से झील में उपस्थित मछलियों की कुल संख्या आकलित करने का प्रयास कर सकते हैं।

चरण 2 **(गणितीय विवरण और सूत्रण)** (Mathematical description & formulation) **:** समस्या के विभिन्न पहलुओं का वर्णन गणितीय शब्दों में कीजिए। लक्षणों को गणितीय रूप में वर्णन करने की कुछ विधियाँ ये हैं:

- चरों को परिभाषित कीजिए
- समीकरण या असमिकाएँ लिखिए
- आँकड़े एकत्रित कीजिए और उन्हें सारणी रूप में संगठित कीजिए
- ग्राफ बनाइए
- प्रायिकताएँ (Probabilities) परिकलित कीजिए

उदाहरण के लिए: एक प्रतिदर्श लेकर जैसा कि चरण 1 में बताया गया है, हम मछलियों की कुल संख्या का आकलन किस प्रकार करते हैं? तब हम प्रतिदर्श के रूप में ली गई मछलियों को चिह्नित करते हैं, और उन्हें शेष मछलियों के साथ रहने के लिए झील में पुन: छोड़ देते हैं। इसके बाद पुन: झील से मछलियों का एक अन्य प्रतिदर्श लेते हैं और यह देखते हैं कि इस नए प्रतिदर्श में पहले चिह्नित की गई कितनी मछलियाँ हैं। तब अनुपात और समानुपात का प्रयोग करके हम मछलियों की कुल संख्या का एक आकलन प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए आइए हम झील से 20 मछलियों का एक प्रतिदर्श लें और उन्हें चिह्नित कर तदुपरांत उन्हें उसी झील में छोड़ दें जिससे वे झील की शेष मछलियों के साथ

मिल जाएँ। तब मछलियों के इस मिश्रित समूह से हम एक अन्य प्रतिदर्श (मान लीजिए 50 मछलियों का प्रतिदर्श) लेते हैं और देखते हैं कि इस नए प्रतिदर्श में चिह्नित मछलियों की संख्या कितनी है। अत: हम अपने आँकड़े एकत्रित करते हैं और उसका विश्लेषण करते हैं।

यहाँ हम यह मान कर चलते हैं कि चिह्नित मछलियाँ अन्य मछलियों के साथ एक समान रूप से मिल जाती हैं और जो प्रतिदर्श हम लेते हैं, वह मछलियों की कुल संख्या का एक अच्छा प्रतिनिधि है।

चरण 3 (गणितीय समस्या हल करना): तब विभिन्न गणितीय तकनीकों को लागू करके चरण 2 में विकसित की गई सरलीकृत गणितीय समस्या को हल किया जाता है।

उदाहरण के लिए मान लीजिए कि चरण 2 के उदाहरण के दूसरे प्रतिदर्श में 5 मछलियाँ चिह्नित हैं। अत: मछलियों की कुल संख्या का $\frac{5}{50}$ अर्थात् $\frac{1}{10}$ चिह्नित हैं। यदि यह कुल संख्या का प्रतिरूपी हो, तो जनसंख्या का $\frac{1}{10} = 20$.

अत: कुल जनसंख्या $= 20 \times 10 = 200$.

चरण 4 (हल की व्याख्या): पिछले चरण में प्राप्त किए गए हल को अब हम वास्तविक जीवन से जुड़ी उस स्थिति के संदर्भ में लेते हैं, जिससे हमने चरण 1 प्रारंभ की थी।

उदाहरण के लिए चरण 3 की समस्या का हल करने पर हमें मछलियों की कुल संख्या 200 प्राप्त हुई थी।

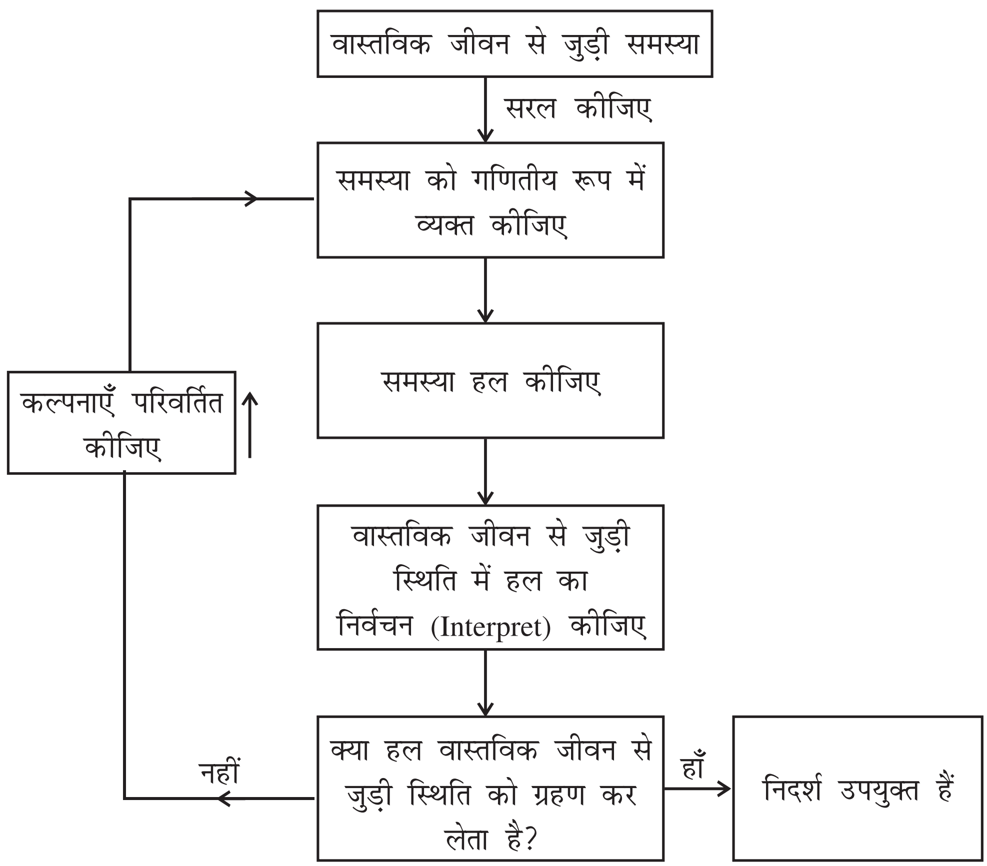
चरण 5 (निदर्श का मान्यकरण) (Validating the model)**:** अब हम अपनी मूल स्थिति पर लौट आते हैं और देखते हैं कि गणितीय विधि से प्राप्त किए गए परिणाम सार्थक हैं या नहीं। यदि सार्थक हैं तो हम निदर्श का प्रयोग तब तक करते हैं जब तक कि नई सूचना उपलब्ध नहीं होती है या कल्पनाएँ परिवर्तित हो जाती हैं।

कभी-कभी सरलीकरण के संबंध में की गई कल्पनाओं के कारण गणितीय विवरण देते समय वास्तविक समस्या के अनिवार्य पहलुओं से हम वंचित रह सकते हैं। ऐसी स्थितियों में हल बहुधा वास्तविकता से हट कर होता है और वास्तविक स्थिति में इसका कोई अर्थ नहीं होता। यदि ऐसा होता है, तो हम चरण 1 में की गई कल्पनाओं पर पुन:विचार करते हैं और कुछ अन्य कारकों को लेकर जिन्हें पहले नहीं लिया गया था, इन्हें वास्तविक बना देते हैं।

उदाहरण के लिए चरण 3 में हमने मछलियों की कुल संख्या का एक आकलन प्राप्त किया था, यह झील में उपस्थित मछलियों की वास्तविक संख्या नहीं भी हो सकती है। अब

हम यह देखते हैं कि चरण 2 और 3 को कुछ बार दोहराने पर प्राप्त किए गए परिणामों का माध्य लेने पर हमें कुल संख्या का उत्तम आकलन प्राप्त होता है या नहीं इससे मछलियों की संख्या का एक उत्तम आकलन प्राप्त हो जाएगा।

गणितीय निदर्शन प्रक्रम को देखने की एक अन्य विधि आकृति A2.1 में दिखाई गई है।



आकृति A2.1

हल की सरलता बनाए रखने के लिए, निदर्शक सरलीकरण और परिशुद्धता के बीच संतुलन बनाए रखना चाहते हैं। वे आशा करते हैं कि सन्निकट वास्तविकता के इतने निकट हो, कि कुछ प्रगति हो सके। सर्वोत्तम परिणाम वह होता है जिससे यह प्रागुक्ति की जा सके कि आगे क्या होगा या जिससे सामान्य परिशुद्धता के साथ परिणाम का आकलन किया जा सके। स्मरण रहे कि समस्या को सरल बनाने के संबंध में हमारे द्वारा की गई भिन्न-भिन्न

कल्पनाओं से भिन्न-भिन्न निदर्श प्राप्त हो सकते हैं। अतः कोई भी निदर्श परिपूर्ण (Perfect) नहीं होता। कुछ उत्तम या इससे भी कुछ बेहतर निदर्श हो सकते हैं।

प्रश्नावली A2.1

1. *निम्नलिखित स्थिति पर विचार कीजिए।*

तेरहवीं शताब्दी के प्रारंभ में लियोनार्ड फिबोनशी (Leonardo Fibonacci) *ने एक प्रश्न किया कि उस स्थिति में कितने खरगोश हो जाएँगे जबकि आप ने केवल दो खरगोशों से प्रारंभ किया था और यहाँ यह मान लीजिए कि एक जोड़ा खरगोश हर महीने शिशुओं का एक जोड़ा पैदा करता है और खरगोश का प्रत्येक जोड़ा अपना पहला शिशु दो महीने की आयु पर पैदा करता है। माह-प्रति-माह खरगोशों के जोड़ों की संख्या शून्य और पहले महीने को छोड़कर पिछले दो महीने में खरगोशों का योग होता है।*

महीना	खरगोशों के जोड़े
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

ठीक 16 महीने बाद आपके पास खरगोशों के लगभग 1600 जोड़े प्राप्त हो जाते हैं।

इस स्थिति में समस्या का और गणितीय निदर्शन के विभिन्न चरणों का स्पष्ट कथन दीजिए।

A2.3 कुछ दृष्टांत

आइए अब हम गणितीय निदर्शन के कुछ उदाहरण लें

उदाहरण 1 (एक जोड़ा पासा फेंकना): मान लीजिए आपकी अध्यापिका आपको अनुमान लगाने के निम्नलिखित खेल की चुनौती देती है। इस खेल में वह एक जोड़ा पासा फेकेंगी। पासा फेंके जाने से पहले आपको यह अनुमान लगाना होता है कि पासों पर आई संख्याओं का योग क्या होगा। सही उत्तर होने पर आपको दो पाइंट मिलेंगे और गलत उत्तर होने पर आपके दो पाइंट कट जाएँगे। कौन-सी संख्याएँ सर्वोत्तम अनुमान होंगी?

हल:

चरण 1 (समस्या समझना) : आपको कुछ ऐसी संख्याओं का ज्ञात होना आवश्यक होता है जिनका पासों पर आने का संयोग अधिक होता है।

चरण 2 (गणितीय विवरण) : गणितीय रूप में यह समस्या पासों पर आई संख्याओं के विभिन्न संभव योगों की प्रायिकताएँ ज्ञात करने में परिवर्तित हो जाती है।

निम्नलिखित 36 संख्या-युग्मों में से एक यादृच्छिक विकल्प के रूप में व्यक्त करके हम अत्यधिक सरल रूप में स्थिति का निदर्शन कर सकते हैं।

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

प्रत्येक युग्म की पहली संख्या पहले पासे पर आने वाली संख्या होती है और दूसरी संख्या दूसरे पासे पर आने वाली संख्या होती है।

चरण 3 (गणितीय समस्या को हल करना): ऊपर के प्रत्येक युग्म की संख्याओं को जोड़ने पर संभावित योग के रूप में हमें 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 और 12 प्राप्त होते हैं। यह मानकर कि सभी 36 युग्म सम-संभावी (equally likely) हैं, हमें इनमें से प्रत्येक की प्रायिकता ज्ञात करनी होती है।

इसे हम निम्नलिखित सारणी के रूप में व्यक्त करते हैं:

योग	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रायिकता	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

यहाँ आप यह पाते हैं कि 7 का योग प्राप्त करने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है जो कि अन्य संख्याओं को योग के रूप में प्राप्त करने की प्रायिकता से अधिक है।

चरण 4 (हल का निर्वचन) (intepreting the solution) क्योंकि योग 7 प्राप्त करने की प्रायिकता अधिकतम है, इसलिए आपको संख्या सात का अनुमान बार-बार लगाना चाहिए।

चरण 5 (निदर्श का मान्यकरण) (validating the model) एक जोड़ा पासों को अनेक बार उछालिए और एक सापेक्ष बारंबारता सारणी बनाइए। सापेक्ष बारंबारताओं की तुलना संगत प्रायिकताओं से कीजिए। यदि ये एक-दूसरे के निकट न हो, तो ऐसी स्थिति में पोससंभवत: अभिनत (biased) होंगे। तब, उस संख्या का मान निकालने के लिए हम आँकड़े प्राप्त कर सकते हैं जिस पर अभिनत है।

अगला उदाहरण लेने से पहले हमें इसकी कुछ पृष्ठभूमि (Back ground) का ज्ञान होना आवश्यक होता है।

अनेक लोगों के साथ यह सामान्य अनुभव होता है कि जब उन्हें धनराशि की आवश्यकता होती है, उनके पास आवश्यक धनराशि नहीं होती। दैनिक जीवन की आवश्यक वस्तुओं को खरीदने या आराम की वस्तुओं को खरीदने के लिए हमें धनराशि की आवश्यकता होती है। स्कूटर, रेफ्रीजरेटर, टेलीविजन, कार आदि जैसी वस्तुओं को खरीदने के संबंध में सीमित निधि वाले ग्राहकों के लिए व्यापारियों ने *किस्त योजना* नामक एक योजना चलाई है।

कभी-कभी इन वस्तुओं को खरीदने के संबंध में ग्राहकों को लुभाने के लिए एक विक्रेता विपणन तकनीक के अंतर्गत किस्त योजना चलाता है। किस्त योजना के अंतर्गत वस्तु खरीदते समय ग्राहक को एक समय में पूरा भुगतान नहीं करना होता। वस्तु खरीदते समय उसे वस्तु की कीमत के एक अंश का ही भुगतान करना होता है और शेष राशि का भुगतान किस्तों में किया जा सकता है जो कि मासिक, तिमाही, छमाही या वार्षिक हो सकती है। हाँ, यह बात अवश्य है कि किस्त योजना के अंतर्गत खरीददार को कुछ अधिक राशि का भुगतान करना होता है। क्योंकि बाद की तिथियों में *(जिसे आस्थिगत भुगतान* (deferrd payment) *कहा जाता है)* भुगतान किए जाने के कारण विक्रेता कुछ ब्याज वसूल करता है।

किस्त योजना को अच्छी तरह समझने से संबंधित कुछ उदाहरण लेने से पहले आइए हम इस संकल्पना से संबंधित बार-बार प्रयुक्त होने वाले शब्दों को समझ लें।

एक वस्तु की नकद कीमत वह धनराशि होती है जिसका भुगतान ग्राहक को वस्तु खरीदते समय करना होता है।

टिप्पणी: यदि भुगतान योजना ऐसी हो कि शेष धनराशि का पूरा भुगतान एक वर्ष के अंदर ही कर दिया जाता हो, तब ऐसी स्थिति में आस्थिगत भुगतान पर साधारण ब्याज लगाया जाता है।

पुराने समय में ऋण के रूप में ली गई राशि पर लगाए गए ब्याज को प्राय: अच्छा नहीं माना जाता था। यहाँ तक कि ऐसा करना वर्जित माना जाता था। ब्याज के भुगतान से संबंधित कानून से बचने की एक विधि यह थी कि ऋण एक मुद्रा में लिया जाता था और भुगतान दूसरी मुद्रा में किया जाता था और इस तरह ब्याज विनियम दर छिप जाता था।

आइए अब हम एक संबंधित गणितीय निदर्शन समस्या पर विचार करें।

उदाहरण 2: जूही एक साइकिल खरीदना चाहती है। इसके लिए वह बाज़ार जाती है और पाती है कि जो साइकिल वह खरीदना चाहती है उसकी कीमत ₹ 1800 है। जूही के पास ₹ 600 हैं। अत: वह दुकानदार को यह बताती है कि वह इस स्थिति में नहीं है कि वह इस समय साइकिल खरीद सके। थोड़ा बहुत हिसाब लगाने के बाद वह जूही को यह बताता है कि ₹ 600 नकद देकर और शेष धनराशि ₹ 610 की दो मासिक किस्त देकर वह साइकिल खरीद सकती है। अब जूही के सामने दो विकल्प बचे रहते हैं। या तो वह किस्त योजना को मान ले या बैंक से ऋण लेकर जो कि 10% की वार्षिक साधारण ब्याज पर उपलब्ध है, नकद भुगतान कर दे तो बताइए कि आर्थिक दृष्टि से कौन-सा विकल्प अधिक उत्तम होगा?

हल :

चरण 1 (समस्या समझना): जूही को यह निर्धारित करना है कि वह दुकानदार द्वारा दिए गए विकल्प को मान ले या नहीं। इसके लिए उसे यह चाहिए कि वह दो ब्याज-दरों से परिचित हो जाए, एक तो वह जो कि किस्त योजना में लगाया जाता है और दूसरा वह जो ब्याज बैंक लगाता है (अर्थात् 10%)।

चरण 2 (गणितीय विवरण): योजना को स्वीकार या अस्वीकार करने के लिए उसे बैंक द्वारा ली जाने वाली ब्याज-दर की तुलना में दुकानदार द्वारा दी जाने वाली ब्याज-दर को देखना होता है। ध्यान रहे कि चूँकि पूरी धनराशि का भुगतान एक वर्ष के अंदर-अंदर करना है,

इसलिए राशि पर साधारण ब्याज ही देना होगा।

हम जानते हैं कि साइकिल की नकद कीमत = ₹ 1800

और किस्त योजना के अंतर्गत नकद भुगतान = ₹ 600

अतः शेष कीमत जिसका भुगतान किस्त योजना के अंतर्गत करना है = ₹ (1800 – 600) = ₹ 1200

मान लीजिए दुकानदार द्वारा लिया जाने वाला वार्षिक ब्याज दर r % है।

प्रत्येक किस्त की धनराशि = ₹ 610

किस्तों में भुगतान की जाने वाली धनराशि = ₹ 610 + ₹ 610 = ₹ 1220

किस्त योजना के अंतर्गत भुगतान किया जाने वाला ब्याज = ₹ 1220 – ₹ 1200 = ₹ 20 (1)

क्योंकि जूही एक महीने तक ₹ 1200 अपने पास रखती है, इसलिए

पहले महीने का मूलधन = ₹ 1200

दूसरे महीने का मूलधन = ₹ (1200 – 610) = ₹ 590

दूसरे महीने के मूलधन की शेष राशि ₹ 590 + लगाया गया ब्याज ₹ 20 = मासिक किश्त ₹ 610 = दूसरी किश्त।

अतः एक महीने का कुल मूलधन = ₹ 1200 + ₹ 590 = ₹ 1790

अब
$$\text{ब्याज} = ₹\ \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} \qquad (2)$$

चरण 3: (समस्या हल करना) : (1) और (2) से हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

या
$$r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \text{ (लगभग)}$$

चरण 4: (हल का निर्वचन): किश्त योजना के अंतर्गत लगाया गया ब्याज दर = 13.14 %.

बैंक द्वारा लगाया गया ब्याज दर = 10%

अतः साइकिल खरीदने के लिए उसे बैंक से ऋण लेना अधिक पसंद करना चाहिए क्योंकि आर्थिक दृष्टि से यह अधिक उत्तम है।

चरण 5 (निदर्श का मान्यकरण) इस स्थिति में इस चरण का कोई विशेष महत्त्व नहीं है, क्योंकि संख्याएँ नियत हैं। फिर भी, बैंक से ऋण लेने के संबंध में स्टैंप पेपर की लागत जैसी औपचारिकताएँ निभाने के कारण प्रभावी ब्याज दर, यदि किस्त योजना की ब्याज दर से अधिक हो जाता है तो वह अपनी राय बदल भी सकती है।

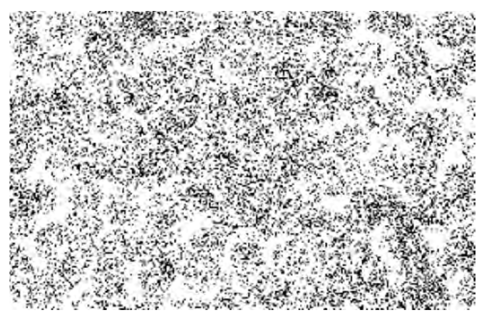
टिप्पणी : अभी भी ब्याज दर का निदर्शन अपनी प्रारंभिक अवस्था में है और अभी भी मान्यकरण वित्तीय बाजार की एक समस्या है। यदि किस्त नियत करने में भिन्न-भिन्न ब्याज दर निगमित (incorporated) किया गया हो, तब मान्यकरण एक महत्वपूर्ण समस्या हो जाता है।

प्रश्नावली A2.2

नीचे दी गई प्रत्येक समस्या में समस्याओं को हल करने के लिए गणितीय निदर्शन की विभिन्न अवस्थाओं को दर्शाइए।

1. एक ऑर्निथॉलॉजिस्ट (ornithologist) एक बड़े क्षेत्र में तोतों की संख्या आकलित करना चाहती है। इनमें से कुछ को पकड़ने के लिए वह एक जाल बिछाती है और 32 तोते पकड़ लेती है, जिन्हें वह रिंग पहनाकर आज़ाद छोड़ देती है। अगले सप्ताह में वह 40 तोतों के लिए जाल बिछाती है जिनमें 8 रिंगित हो जाते हैं।
   (i) उसके दूसरे पकड़ का कितना अंश रिंगित होता है?
   (ii) क्षेत्र में तोतों की कुल संख्या का एक आकलन ज्ञात कीजिए।

2. मान लीजिए संलग्न आकृति एक जंगल के एक हवाई जहाज से खीचीं गई फोटो को दर्शाता है, जिसमें प्रत्येक बिंदु एक पेड़ निरूपित करता है। आपका उद्देश्य पर्यावरण सर्वेक्षण के एक अंश के रूप में इस मार्ग पर पेड़ों की संख्या ज्ञात करना है।



आकृति A2.2

3. एक टी. वी. को या तो ₹ 24000 नकद देकर या ₹ 8000 नकद और ₹ 2800 की छः मासिक किस्तों में भुगतान करके खरीदा जा सकता है। एक टी. वी. खरीदने के लिए अली बाज़ार जाता है और इसके लिए उसके पास ₹ 8000 हैं। इस समय उसके पास दो विकल्प हैं। एक विकल्प यह है कि वह किस्त योजना के अंतर्गत टी. वी. खरीदे और दूसरा विकल्प यह है कि किसी वित्तीय सोसाइटी से ऋण लेकर नकद भुगतान

करके टी. वी. खरीदे। सोसाइटी 18% की वार्षिक साधारण ब्याज की दर से ब्याज लगाती है। अली के लिए कौन-सा विकल्प अधिक उत्तम है?

A2.4 गणितीय निदर्शन का महत्त्व क्यों है?

जैसाकि हमने उदाहरणों में देखा है कि गणितीय निदर्शन एक आंतर विषय (inter-disciplinary) शाखा है। इसमें गणितज्ञ और अन्य विषय क्षेत्रों के विशेषज्ञ वर्तमान उत्पादों में सुधार लाने, उत्तम उत्पाद विकसित करने या कुछ उत्पादों के व्यवहार की प्रागुक्ति करने में अपने ज्ञान और विशेषज्ञता का सहयोग देते हैं।

यूँ तो निदर्शन (modelling) का महत्वपूर्ण होने के अनेक विशेष कारण हैं परंतु किसी न किसी रूप में अधिकांश कारणों का संबंध निम्नलिखित से होता है :

- *समझदारी बढ़ाना :* यदि एक ऐसा गणितीय निदर्श हो जो वास्तविक जगत से जुड़े तंत्र के अनिवार्य व्यवहार को प्रदर्शित करता हो, तो निदर्श का विश्लेषण करके हम तंत्र को अच्छी तरह समझ सकते हैं। और, निदर्श का निर्माण करते समय ही हम यह पता लगा लेते हैं कि तंत्र में कौन-कौन कारक अधिक महत्वपूर्ण हैं और तंत्र की भिन्न-भिन्न पहलू एक-दूसरे के साथ किस प्रकार संबंधित हैं।

- *प्रागुक्ति या पूर्वानुमान या अनुकरण करना :* प्रायः हम यह जानना चाहते हैं कि वास्तविक जगत से जुड़े तंत्र का भविष्य में क्या महत्त्व है, परंतु तंत्र के साथ सीधा प्रयोग करना खर्चीला, अव्यावहारिक या असंभव होता है। उदाहरण के लिए, मौसम की प्रागुक्ति के लिए, मानव में औषधि-दक्षता का अध्ययन करने, एक न्यूक्लीयर रिऐक्टर का इष्टतम अभिकलन ज्ञात करना, आदि-आदि।

  अनेक प्रकार के संगठनों में पूर्वानुमान लगाने का अधिक महत्त्व होता है, क्योंकि निर्णयन में भावी घटनाओं की प्रागुक्तियों को निगमित करना होता है। उदाहरण के लिए:

  - विपणन विभागों में माँग के विश्वसनीय पूर्वानुमान बिक्री संबंधी तकनीकों की योजना बनाने में सहायक होते हैं।

  - स्कूल बोर्ड को विभिन्न ज़िलों में स्कूल जाने वाले बच्चों की संख्या में हो रही वृद्धि का पूर्वानुमान लगाना आवश्यक होता है, जिससे यह निर्णय लिया जा सके कि कहाँ और कब नए स्कूल खोले जा सकें।

  प्रायः भविष्य की प्रागुक्ति करने के लिए पूर्वानुमान लगाने वाले पिछले आँकड़ों का प्रयोग करते हैं। सबसे पहले तो उस प्रतिरूप को पहचानने के लिए आँकड़ों का

विश्लेषण करते हैं जो इसका वर्णन कर सके। तब पूर्वानुमान लगाने के लिए इन आँकड़ों और प्रतिरूप का प्रयोग भविष्य में किया जाता है। इस आधारभूत रणनीति का प्रयोग अधिकांश पूर्वानुमान तकनीकों में किया जाता है और यह इस कल्पना पर आधारित होता है कि वह प्रतिरूप जिसे पहचान लिया गया है, भविष्य में भी लागू होता रहेगा।

- *आकलन करना :* प्राय: हमें बड़े मानों का आकलन करना होता है। इस संबंध में जंगल में वृक्षों, झील में मछलियों आदि से संबंधित उदाहरण आप देख चुके हैं। एक अन्य उदाहरण के रूप में, चुनाव के पहले चुनाव में भाग लेने वाली पार्टियाँ चुनाव में अपनी पार्टी के जीतने की प्रायिकता की प्रागुक्ति करना चाहती हैं। विशेष रूप से वे इस बात का आकलन करना चाहती हैं कि उनके निर्वाचन क्षेत्र के कितने लोग उनकी पार्टी को वोट देंगे। अपनी प्रागुक्ति के अनुसार अपने चुनाव अभियान की रणनीति के बारे में निर्णय ले सकते हैं। चुनाव में, किस पार्टी को कितनी सीटें मिलेंगी, इसकी प्रागुक्ति करने के लिए निर्गम मतानुमान (exit polls) का व्यापक प्रयोग किया जाता है।

प्रश्नावली A2.3

1. पिछले पाँच वर्षों के आँकड़ों के आधार पर वर्ष के अंत में दसवीं कक्षा के बोर्ड परीक्षा में आपके स्कूल द्वारा गणित में प्राप्त किए जाने वाले औसत प्रतिशत अंकों का पूर्वानुमान लगाइए।

A2.5 सारांश

इस परिशिष्ट में, आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है:

1. एक गणितीय निदर्श वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थिति का गणितीय विवरण होता है। गणितीय निदर्शन वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्याओं को हल करने और इसे प्रयोग करने के लिए गणितीय निदर्श का निर्माण करने का प्रक्रम है।
2. निदर्शन में निम्नलिखित चरण लागू किए जाते हैं : समस्या समझना, गणितीय निदर्श का सूत्रण, इसे हल करना, वास्तविक जीवन से जुड़ी स्थिति में इसका निर्वचन करना और अंत में अति महत्वपूर्ण निदर्श का मान्यकरण।
3. कुछ गणितीय निदर्श विकसित करना।
4. गणितीय निदर्शन का महत्त्व।

उत्तर/संकेत

प्रश्नावली 1.1

1. (i) 45 (ii) 196 (iii) 51

2. कोई पूर्णांक $6q$, $6q + 1$, $6q + 2$, $6q + 3$, $6q + 4$ या $6q + 5$ के रूप का हो सकता है।

3. 8 स्तंभ

5. कोई पूर्णांक $9q$, $9q + 1$, $9q + 2$, $9q + 3$, . . ., या $9q + 8$ के रूप का हो सकता है।

प्रश्नावली 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$

(iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

2. (i) LCM = 182; HCF = 13 (ii) LCM = 23460; HCF = 2 (iii) LCM = 3024; HCF = 6

3. (i) LCM = 420; HCF = 3 (ii) LCM = 11339; HCF = 1 (iii) LCM = 1800; HCF = 1

4. 22338 **7.** 36 मिनट

प्रश्नावली 1.4

1. (i) सांत (ii) सांत

(iii) अनवसानी आवर्ती (iv) सांत

(v) अनवसानी आवर्ती (vi) सांत

(vii) अनवसानी आवर्ती (viii) सांत

(ix) सांत (x) अनवसानी आवर्ती

2. (i) 0.00416 (ii) 2.125 (iv) 0.009375

(vi) 0.115 (viii) 0.4 (ix) 0.7

3. (i) परिमेय; q के अभाज्य गुणनखंड 2, या 5 या दोनों होंगे।

(ii) अपरिमेय

(iii) परिमेय, q के अभाज्य गुणनखंड 2 या 5 के अतिरिक्त एक और गुणनखंड होगा।

प्रश्नावली 2.1

1. (i) कोई शून्यक नहीं (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

प्रश्नावली 2.2

1. (i) $-2, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$

(iv) $-2, 0$ (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

प्रश्नावली 2.3

1. (i) भागफल $= x - 3$ और शेषफल $= 7x - 9$

(ii) भागफल $= x^2 + x - 3$ और शेषफल $= 8$

(iii) भागफल $= -x^2 - 2$ और शेषफल $= -5x + 10$

2. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) नहीं **3.** $-1, -1$ **4.** $g(x) = x^2 - x + 1$

5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14, g(x) = 2, q(x) = x^2 - x + 7, r(x) = 0$

(ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1, g(x) = x^2 - 1, q(x) = x + 1, r(x) = 2x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2, g(x) = x^2 - 1, q(x) = x + 2, r(x) = 4$

(i), (ii) और (iii) में से प्रत्येक के कई उदाहरण हो सकते हैं।

प्रश्नावली 2.4 (ऐच्छिक)*

2. $x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ **3.** $a = 1, b = \pm\sqrt{2}$

4. $-5, 7$ **5.** $k = 5$ और $a = -5$

प्रश्नावली 3.1

1. बीजगणीतीय रूप से दी गई दोनों स्थितियों को निम्नलिखित रूप में निरूपित किया जा सकता है : $x - 7y + 42 = 0; x - 3y - 6 = 0$, जहाँ x और y क्रमशः आफ़ताब और उसकी पुत्री की वर्तमान आयु है। आप उपरोक्त रैखिक समीकरणों का ग्राफ खींच सकते हैं जो स्थितियों का ग्राफीय रूप निरूपित करता है।

2. बीजगणीतीय रूप से दी गई दोनों शर्तों को निम्नलिखित रूप में निरूपित किया जा सकता है :

$x + 2y = 1300; x + 3y = 1300$, जहाँ x और y क्रमशः एक बल्ला एवं एक गेंद के मूल्य (₹ में) हैं। दी गई स्थितियों को ग्राफीय रूप में व्यक्त करने के लिए आप इन दोनों रैखिक समीकरणों का ग्राफ खीच सकते हैं।

3. बीजगणीतीय रूप से दी गई दोनों स्थितियों को निम्नलिखित रूप में निरूपित किया जा सकता है।

$2x + y = 160; 4x + 2y = 300$, जहाँ x और y क्रमशः सेब एवं अंगूर के मूल्य (₹ प्रति kg में) हैं। दी गई स्थितियों को ग्राफीय रूप में निरूपित करने के लिए आप इन दोनों रैखिक समीकरणों का ग्राफ खींच सकते हैं।

प्रश्नावली 3.2

1. (i) रैखिक समीकरणों का वांछित युग्म है :

$x + y = 10; x - y = 4$, जहाँ x लड़कियों की संख्या है तथा y लड़कों की संख्या है।

ग्राफीय हल के लिए ग्राफ पेपर पर एक ही अक्ष को लेते हुए इन समीकरणों का ग्राफ खींचिए।

लड़कियाँ = 7, लड़के = 3.

(ii) रैखिक समीकरणों का वांछित युग्म है:

$5x + 7y = 50; 7x + 5y = 46$, जहाँ x और y क्रमशः एक पेंसिल और एक कलम के मूल्य (₹ में) हैं।

ग्राफीय हल के लिए ग्राफ पेपर पर समान अक्षों को लेते हुए इन समीकरणों का ग्राफ खींचिए।

एक पेंसिल का मूल्य = ₹ 3, एक कलम का मूल्य = ₹ 5

2. (i) एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है। (ii) संपाती (iii) समांतर

3. (i) संगत (ii) असंगत (iii) संगत

(iv) संगत (v) संगत

4. (i) संगत (ii) असंगत (iii) संगत (iv) असंगत

उपरोक्त (i) का हल, $y = 5 - x$ द्वारा प्रदत्त है, जहाँ x का कोई भी मान हो सकता हैं। अर्थात् अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

उपरोक्त (iii) का हल $x = 2, y = 2$ है अर्थात् अद्वितीय हल है।

5. लंबाई = 20 m और चौड़ाई = 16 m.

6. तीनों भागों के लिए एक संभावित हल है :

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. त्रिभुज के शीर्ष (–1, 0), (4, 0) और (2, 3) हैं।

प्रश्नावली 3.3

1. (i) $x = 9,\ y = 5$ (ii) $s = 9,\ t = 6$ (iii) $y = 3x - 3$,

जहाँ x कोई भी मान ले सकता है अर्थात अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

(iv) $x = 2,\ y = 3$ (v) $x = 0,\ y = 0$ (vi) $x = 2,\ y = 3$

2. $x = -2,\ y = 5;\ m = -1$.

3. (i) $x - y = 26,\ x = 3y$, जहाँ x और y $(x > y)$ दो संख्याएँ हैं; $x = 39, y = 13$.

(ii) $x - y = 18,\ x + y = 180$, जहाँ x और y अंशो में दो कोणों की माप हैं; $x = 99,\ y = 81$.

(iii) $7x + 6y = 3800, 3x + 5y = 1750$, जहाँ x और y क्रमशः एक बल्ला तथा एक गेंद के मूल्य(₹ में) हैं; $x = 500, y = 50$.

(iv) $x + 10y = 105,\ x + 15y = 155$, जहाँ x (₹ में) नियत भाड़ा है और y (₹ में) प्रति km भाड़ा है; $x = 5,\ y = 10$; ₹ 255।

(v) $11x - 9y + 4 = 0,\ 6x - 5y + 3 = 0$, जहाँ x और y क्रमशः भिन्न के अंश और हर हैं; $\frac{7}{9}$ $(x = 7,\ y = 9)$।

(vi) $x - 3y - 10 = 0, x - 7y + 30 = 0$, जहाँ x और y क्रमशः जैकब और उसके पुत्र की वर्षों में आयु है; $x = 40, y = 10$.

प्रश्नावली 3.4

1. (i) $x = \frac{19}{5},\ y = \frac{6}{5}$ (ii) $x = 2,\ y = 1$ (iii) $x = \frac{9}{13}, y = -\frac{5}{13}$,

(iv) $x = 2,\ y = -3$

2. (i) $x - y + 2 = 0, 2x - y - 1 = 0$, जहाँ x और y भिन्न के अंश और हर हैं; $\frac{3}{5}$.

(ii) $x - 3y + 10 = 0,\ x - 2y - 10 = 0$, जहाँ x और y क्रमशः नूरी और सोनू की उम्र (वर्षों में) हैं। नूरी की उम्र $(x) = 50$, सोनू की उम्र $(y) = 20$.

(iii) $x + y = 9,\ 8x - y = 0$, जहाँ x और y क्रमशः संख्या के दहाई और इकाई के अंक हैं; 18.

(iv) $x + 2y = 40,\ x + y = 25$, जहाँ x और y क्रमशः ₹ 50 और ₹ 100 के नोटों की संख्याएँ हैं; $x = 10$, $y = 15$.

(v) $x + 4y = 27,\ x + 2y = 21$, जहाँ x नियत भाड़ा (₹ में) है और y अतिरिक्त भाड़ा (₹ में) प्रतिदिन का है; $x = 15,\ y = 3$.

प्रश्नावली 3.5

1. (i) कोई हल नहीं (ii) अद्वितीय हल; $x = 2,\ y = 1$

(iii) अपरिमित रूप से अनेक हल (iv) अद्वितीय हल; $x = 4,\ y = -1$

2. (i) $a = 5, b = 1$ (ii) $k = 2$ **3.** $x = -2,\ y = 5$

4. (i) $x + 20y = 1000,\ x + 26y = 1180$, जहाँ x (₹ में) नियत भाड़ा है और y (₹ में) भोजन पर प्रतिदिन का खर्च (व्यय) है; $x = 400, y = 30$.

(ii) $3x - y - 3 = 0,\ 4x - y - 8 = 0$, जहाँ x और y भिन्न का अंश और हर है; $\frac{5}{12}$.

(iii) $3x - y = 40,\ 2x - y = 25$, जहाँ x और y क्रमशः सही और गलत उत्तरों की संख्याएँ हैं; 20.

(iv) $u - v = 20,\ u + v = 100$, जहाँ u और v (km/h में) दोनों कारों की चाल हैं; $u = 60, v = 40$.

(v) $3x - 5y - 6 = 0,\ 2x + 3y - 61 = 0$, जहाँ x और y (इकाईयों में) क्रमशः आयत की लंबाई और चौड़ाई हैं; लंबाई $(x) = 17$, चौड़ाई $(y) = 9$.

प्रश्नावली 3.6

1. (i) $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3}$ (ii) $x = 4,\ y = 9$ (iii) $x = \frac{1}{5},\ y = -2$

(iv) $x = 4,\ y = 5$ (v) $x = 1,\ y = 1$ (vi) $x = 1,\ y = 2$

(vii) $x = 3,\ y = 2$ (viii) $x = 1,\ y = 1$

2. (i) $u + v = 10, u - v = 2$, जहाँ u और v (km/h में) क्रमशः नाव खेने की चाल तथा धारा की चाल हैं; $u = 6, v = 4$.

(ii) $\frac{2}{n} + \frac{5}{m} = \frac{1}{4},\ \frac{3}{n} + \frac{6}{m} = \frac{1}{3}$, जहाँ n और m क्रमशः कसीदे के कार्य को समाप्त करने में एक महिला और एक पुरुष द्वारा लिए गए दिनों की संख्याएँ हैं; $n = 18, m = 36$.

(iii) $\frac{60}{u} + \frac{240}{v} = 4,\ \frac{100}{u} + \frac{200}{v} = \frac{25}{6}$, जहाँ u और v (km/h में) क्रमशः ट्रेन और बस की चाल हैं; $u = 60,\ v = 80$.

प्रश्नावली 3.7 (ऐच्छिक)*

1. अनी की आयु 19 वर्ष है और बीजू की आयु 16 वर्ष है या अनी की आयु 21 वर्ष तथा बीजू की आयु 24 वर्ष है।

2. ₹ 40, ₹ 170 मान लीजिए प्रथम व्यक्ति के पास x (₹ में) संपत्ति है और दूसरे व्यक्ति के पास y (₹ में) संपत्ति है। तब
$x + 100 = 2(y - 100), y + 10 = 6(x - 10)$

3. 600 km 4. 36 5. $\angle A = 20°, \angle B = 40°, \angle C = 120°$

6. त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक (1, 0), (0, –3), (0, –5) हैं।

7. (i) $x = 1, y = -1$ (ii) $x = \dfrac{c(a-b)-b}{a^2-b^2}, y = \dfrac{c(a-b)+a}{a^2-b^2}$
(iii) $x = a, y = b$ (iv) $x = a + b, y = -\dfrac{2ab}{a+b}$ (v) $x = 2, y = 1$

8. $\angle A = 120°, \angle B = 70°, \angle C = 60°, \angle D = 110°$

प्रश्नावली 4.1

1. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) नहीं (iv) हाँ
(v) हाँ (vi) नहीं (vii) नहीं (viii) हाँ

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 0$, जहाँ x (मीटर में) भूखंड की चौड़ाई है।
(ii) $x^2 + x - 306 = 0$, जहाँ x लघुतर पूर्णांक है।
(iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$, जहाँ x (वर्षों में) रोहन की वर्तमान आयु है।
(iv) $u^2 - 8u - 1280 = 0$, जहाँ u (km/h में) ट्रेन की चाल है।

प्रश्नावली 4.2

1. (i) $-2, 5$ (ii) $-2, \dfrac{3}{2}$ (iii) $-\dfrac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$
(iv) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}$ (v) $\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10}$

2. (i) 9, 36 (ii) 25, 30

3. संख्याएँ 13 और 14 हैं। 4. धनात्मक पूर्णांक 13 और 14 हैं।

5. 5 cm और 12 cm 6. वस्तुओं की संख्या = 6, प्रत्येक वस्तु का मूल्य = ₹ 15

प्रश्नावली 4.3

1. (i) $\frac{1}{2}, 3$ (ii) $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (iii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iv) अस्तित्व नहीं है।

2. जैसाकि प्रश्न 1 में है। **3.** (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1, 2 **4.** 7 वर्ष

5. गणित में प्राप्तांक = 12, अंग्रेजी में प्राप्तांक = 18;
या गणित में प्राप्तांक = 13, अंग्रेजी में प्राप्तांक = 17

6. 120 m, 90 m **7.** 18, 12 या 18, –12

8. 40 km/h **9.** 15 घंटे, 25 घंटे

10. सवारी रेलगाड़ी की चाल = 33 km/h, एक्सप्रेस रेलगाड़ी की चाल = 44 km/h

11. 18 m, 12 m

प्रश्नावली 4.4

1. (i) वास्तविक मूलों का अस्तित्व नहीं है। (ii) बराबर मूल; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(iii) विभिन्न मूल; $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$

3. हाँ; 40 m, 20 m. **4.** नहीं **5.** हाँ; 20 m, 20 m

प्रश्नावली 5.1

1. (i) हाँ; 15, 23, 31, . . . एक A.P. बनाते हैं क्योंकि प्रत्येक अगला पद पिछले पद में 8 जोड़ने से प्राप्त होता है।

(ii) नहीं, आयतन V, $\frac{3V}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 V, \cdots$ हैं। (iii) हाँ; 150, 200, 250, . . . एक A.P. बनाते हैं।

(iv) नहीं, राशियाँ $10000\left(1+\frac{8}{100}\right), 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2, 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^3, \cdots$ हैं।

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) – 2, – 2, – 2, – 2 (iii) 4, 1, – 2, – 5

(iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (v) – 1.25, – 1.50, – 1.75, – 2.0

3. (i) $a = 3,\ d = -2$ (ii) $a = -5,\ d = 4$

(iii) $a = \frac{1}{3},\ d = \frac{4}{3}$ (iv) $a = 0.6,\ d = 1.1$

4. (i) नहीं (ii) हाँ, $d = \frac{1}{2};\ 4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) हाँ, $d = -2;\ -9.2, -11.2, -13.2$ (iv) हाँ, $d = 4;\ 6, 10, 14$

(v) हाँ, $d = \sqrt{2};\ 3 + 4\sqrt{2},\ 3 + 5\sqrt{2},\ 3 + 6\sqrt{2}$ (vi) नहीं

(vii) हाँ, $d = -4;\ -16, -20, -24$ (viii) हाँ, $d = 0;\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(ix) नहीं (x) हाँ, $d = a;\ 5a, 6a, 7a$

(xi) नहीं (xii) हाँ, $d = \sqrt{2};\ \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii) नहीं (xiv) नहीं (xv) हाँ, $d = 24;\ 97, 121, 145$

प्रश्नावली 5.2

1. (i) $a_n = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$ (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$

2. (i) C (ii) B

3. (i) $\boxed{14}$ (ii) $\boxed{18}$, $\boxed{8}$ (iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}$, $\boxed{8}$

(iv) $\boxed{-2}$, $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ (v) $\boxed{53}$, $\boxed{23}$, $\boxed{8}$, $\boxed{-7}$

4. 16वाँ पद **5.** (i) 34 (ii) 27

6. नहीं **7.** 178 **8.** 64

9. 5वाँ पद **10.** 1 **11.** 65वाँ पद

12. 100 **13.** 128 **14.** 60

15. 13 **16.** 4, 10, 16, 22, . . .

17. अंतिम पद से 20वाँ पद 158 है।

18. –13, –8, –3 **19.** 11वाँ वर्ष **20.** 10

प्रश्नावली 5.3

1. (i) 245 (ii) –180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

2. (i) $1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) –8930

3. (i) $n = 16, S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}, S_{13} = 273$ (iii) $a = 4, S_{12} = 246$

(iv) $d = -1, a_{10} = 8$ (v) $a = -\frac{35}{3}, a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) $n = 5, a_n = 34$

(vii) $n = 6, d = \frac{54}{5}$ (viii) $n = 7, a = -8$ (ix) $d = 6$

(x) $a = 4$

4. 12. सूत्र $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ में $a = 9, d = 8, S = 636$ रखने पर हम द्विघात समीकरण $4n^2 + 5n - 636 = 0$ प्राप्त करते हैं। हल करने पर मूल $n = -\frac{53}{4}, 12$ पाते हैं। इन दोनों मूलों में केवल एक मूल 12 ही स्वीकार्य है।

5. $n = 16, d = \frac{8}{3}$ **6.** $n = 38, S = 6973$ **7.** योग= 1661

8. $S_{51} = 5610$ **9.** n^2 **10.** (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

11. $S_1 = 3, S_2 = 4;\ a_2 = S_2 - S_1 = 1;\ S_3 = 3,\ a_3 = S_3 - S_2 = -1,$
$a_{10} = S_{10} - S_9 = -15;\ a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n.$

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** ₹ 27750

16. पुरस्कारों का मूल्य(₹ में) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40 हैं।

17. 234 **18.** 143 cm

19. 16 पंक्तियाँ, 5 लट्ठों को सबसे ऊपरी पंक्ति में रखते हैं। $S = 200, a = 20, d = -1$ सूत्र $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ में रखने पर हम $41n - n^2 = 400$ प्राप्त करते हैं। हल करने पर $n = 16, 25$ है। अत: पंक्तियों की संख्या16 या 25 है। अब $a_{25} = a + 24d = -4$ अर्थात् 25 वीं पंक्ति में लट्ठों की संख्या –4 है जो संभव नहीं है। अत: $n = 25$ संभव नहीं है। $n = 16$ के लिए, $a_{16} = 5$. अत: 16 पंक्तियाँ हैं और सबसे ऊपर वाली पंक्ति में 5 लट्ठे रखे हैं।

20. 370 m

प्रश्नावली 5.4 (ऐच्छिक)*

1. 32वाँ पद   2. $S_{16} = 20, 76$ 3. 385 cm
4. 35   5. 750 m^3

प्रश्नावली 6.1

1. (i) समरूप   (ii) समरूप   (iii) समबाहु
   (iv) बराबर, समानुपाती   3. नहीं

प्रश्नावली 6.2

1. (i) 2 cm   (ii) 2.4 cm
2. (i) नहीं   (ii) हाँ   (iiii) हाँ
9. बिंदु O से होते हुए DC के समांतर एक रेखा खींचिए जो AD और BC को क्रमश बिंदु E और F पर प्रतिच्छेदित करे।

प्रश्नावली 6.3

1. (i) हाँ, AAA, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ii) हाँ, SSS, $\Delta ABC \sim \Delta QRP$
   (iii) नहीं   (iv) हाँ, SAS, $\Delta MNL \sim \Delta QPR$
   (v) नहीं   (vi) हाँ, AA, $\Delta DEF \sim \Delta PQR$
2. 55°, 55°, 55°
14. AD को बिंदु E तक बढ़ाइए ताकि AD = DE और PM को बिंदु N तक बढ़ाइए ताकि PM = MN हो। EC और NR को मिलाइए।
15. 42 m

प्रश्नावली 6.4

1. 11.2 cm   2. 4 : 1   5. 1 : 4   8. C   9. D

प्रश्नावली 6.5

1. (i) हाँ, 25 cm   (ii) नहीं   (iii) नहीं   (iv) हाँ, 13 cm
6. $a\sqrt{3}$ 9. 6m   10. $6\sqrt{7}$ m   11. $300\sqrt{61}$ km
12. 13m   17. C

प्रश्नावली 6.6 (ऐच्छिक)*

1. R से होते हुए SP के समांतर रेखा खींचिए जो रेखा QP को बढ़ाने पर बिंदु T पर प्रतिच्छेद करे। दर्शाइए कि PT = PR है।

6. इस प्रश्नावली के Q.5 (iii) का परिणाम प्रयोग कीजिए। **7.** 3 m, 2.79 m

प्रश्नावली 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39; 39 km **3.** नहीं **4.** हाँ **5.** चम्पा सही है।

6. (i) वर्ग (ii) चतुर्भुज नहीं है (iii) समांतर चतुर्भुज

7. $(-7, 0)$ **8.** $-9, 3$ **9.** ± 4, QR $= \sqrt{41}$, PR $= \sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$

10. $3x+y-5=0$

प्रश्नावली 7.2

1. $(1, 3)$ **2.** $\left(2, -\frac{5}{3}\right); \left(0, -\frac{7}{3}\right)$

3. $\sqrt{61}$ m; 5वीं रेखा में 22.5 m दूरी पर **4.** 2 : 7

5. $1:1; \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ **6.** $x=6,\ y=3$ **7.** $(3, -10)$

8. $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$ **9.** $\left(-1, \frac{7}{2}\right), (0, 5), \left(1, \frac{13}{2}\right)$ **10.** 24 वर्ग मात्रक

प्रश्नावली 7.3

1. (i) $\frac{21}{2}$ वर्ग मात्रक (ii) 32 वर्ग मात्रक **2.** (i) $k=4$ (ii) $k=3$

3. 1 वर्ग मात्रक; 1 : 4 **4.** 28 वर्ग मात्रक

प्रश्नावली 7.4 (ऐच्छिक)*

1. 2 : 9 **2.** $x+3y-7=0$ **3.** $(3, -2)$ **4.** $(1, 0), (1, 4)$

5. (i) (4, 6), (3, 2), (6, 5); AD और AB को निर्देशांक अक्षों के रूप में लेकर

(ii) (12, 2), (13, 6), (10, 3); CB और CD को निर्देशांक अक्षों के रूप में लेकर। $\frac{9}{2}$ वर्ग इकाई, $\frac{9}{2}$ वर्ग मात्रक; दोनों स्थितियों में क्षेत्रफल समान है।

6. $\frac{15}{32}$ वर्ग मात्रक; 1 : 16

7. (i) $D\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ (ii) $P\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$

(iii) $Q\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right), R\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$ (iv) P, Q, R एक ही बिंदु हैं।

(v) $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

8. समचतुर्भुज

प्रश्नावली 8.1

1. (i) $\sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}$ (ii) $\sin C = \frac{24}{25}, \cos C = \frac{7}{25}$

2. 0

3. $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$

4. $\sin A = \frac{15}{17}, \sec A = \frac{17}{8}$

5. $\sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}, \cot\theta = \frac{12}{5}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{49}{64}$

8. हाँ

9. (i) 1 (ii) 0

10. $\sin P = \frac{12}{13}, \cos P = \frac{5}{13}, \tan P = \frac{12}{5}$

11. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य (v) असत्य

प्रश्नावली 8.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$ (iv) $\frac{43 - 24\sqrt{3}}{11}$ (v) $\frac{67}{12}$

2. (i) A (ii) D (iii) A (iv) C

3. $\angle A = 45°, \angle B = 15°$

4. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य (v) सत्य

प्रश्नावली 8.3

1. (i) 1 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 0

3. $\angle A = 36°$ **5.** $\angle A = 22°$ **7.** $\cos 23° + \sin 15°$

प्रश्नावली 8.4

1. $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$, $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$, $\sec A = \dfrac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

2. $\sin A = \dfrac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$, $\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$, $\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

$\cot A = \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$, $\operatorname{cosec} A = \dfrac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

3. (i) 1 (ii) 1 **4.** (i) B (ii) C (iii) D (iv) D

प्रश्नावली 9.1

1. 10 m **2.** $8\sqrt{3}$ m **3.** 3 m, $2\sqrt{3}$ m **4.** $10\sqrt{3}$ m

5. $40\sqrt{3}$ m **6.** $19\sqrt{3}$ m **7.** $20\left(\sqrt{3}-1\right)$ m **8.** $0.8\left(\sqrt{3}+1\right)$ m

9. $16\frac{2}{3}$ m **10.** $20\sqrt{3}$ m, 20 m, 60 m **11.** $10\sqrt{3}$ m, 10 m **12.** $7\left(\sqrt{3}+1\right)$ m

13. $75(\sqrt{3}-1)$ m **14.** $58\sqrt{3}$ m **15.** 3 सेकंड

प्रश्नावली 10.1

1. अपरिमित रूप से अनेक

2. (i) एक (ii) छेदक रेखा (iii) दो (iv) स्पर्श बिंदु **3.** D

प्रश्नावली 10.2

1. A **2.** B **3.** A **6.** 3 cm

7. 8 cm **12.** AB = 15 cm, AC = 13 cm

प्रश्नावली 12.1

1. 28 cm **2.** 10 cm

3. स्वर्ण : 346.5 cm^2; लाल : 1039.5 cm^2; नीला : 1732.5 cm^2; काला : 2425.5 cm^2; सफेद : 3118.5 cm^2.

4. 4375 **5.** A

प्रश्नावली 12.2

1. $\frac{132}{7} cm^2$ **2.** $\frac{77}{8} cm^2$ **3.** $\frac{154}{3} cm^2$

4. (i) 28.5 cm^2 (ii) 235.5 cm^2

5. (i) 22 cm (ii) 231 cm^2 (iii) $\left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right) cm^2$

6. 20.4375 cm^2; 686.0625 cm^2 **7.** 88.44 cm^2

8. (i) 19.625 m^2 (ii) 58.875 cm^2 **9.** (i) 285 mm (ii) $\frac{385}{4}$ mm^2

10. $\frac{22275}{28}$ cm^2 **11.** $\frac{158125}{126}$ cm^2 **12.** 189.97 km^2

13. ₹ 162.68 **14.** D

प्रश्नावली 12.3

1. $\frac{4523}{28} cm^2$ **2.** $\frac{154}{3} cm^2$ **3.** 42 cm^2

4. $\left(\frac{660}{7} + 36\sqrt{3}\right) cm^2$ **5.** $\frac{68}{7}$ cm^2 **6.** $\left(\frac{22528}{7} - 768\sqrt{3}\right) cm^2$

7. 42 cm^2 **8.** (i) $\frac{2804}{7}$ m (ii) 4320 m^2

9. 66.5 cm^2 **10.** 1620.5 cm^2 **11.** 378 cm^2

12. (i) $\frac{77}{8}$ cm^2 (ii) $\frac{49}{8}$ cm^2 **13.** 228 cm^2

14. $\frac{308}{3}$ cm^2 **15.** 98 cm^2 **16.** $\frac{256}{7}$ cm^2

प्रश्नावली 13.1

1. 160 cm^2 **2.** 572 cm^2 **3.** 214.5 cm^2

4. सबसे बड़ा व्यास = 7 cm, पृष्ठीय क्षेत्रफल = 332.5 cm^2

5. $\frac{1}{4}l^2(\pi + 24)$ **6.** 220 m^2 **7.** 44 m^2, Rs 22000

8. 18 cm^2 **9.** 374 cm^2

प्रश्नावली 13.2

1. $\pi \text{ cm}^3$

2. 66 cm^3. मॉडल के अंदर की हवा का आयतन = आंतरिक हवा का आयतन (शंकु + बेलन + शंकु)

$= \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_1\right)$, जहाँ r शंकु तथा बेलन की त्रिज्या है, h_1 शंकु की ऊँचाई और h_2 बेलन की ऊँचाई (लंबाई) है।

अभीष्ट आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + 3h_2 + h_1)$.

3. 338 cm^3 **4.** 523.53 cm^3 **5.** 100 **6.** 892.26 kg

7. 1.131 m^3 (लगभग) **8.** सही नहीं है। सही उत्तर 346.51 cm^3 है।

प्रश्नावली 13.3

1. 2.74 cm **2.** 12 cm **3.** 2.5 m

4. 1.125 m **5.** 10 **6.** 400

7. 36 cm; $12\sqrt{13}$ cm **8.** 562500 m^2 या 56.25 हेक्टेयर **9.** 100 मिनट

प्रश्नावली 13.4

1. $102\frac{2}{3} \text{ cm}^3$ **2.** 48 cm^2 **3.** $710\frac{2}{7} \text{ cm}^2$

4. दूध का मूल्य ₹ 209 है तथा धातु-शीट का मूल्य ₹ 156.75 है। **5.** 7964.4 m

प्रश्नावली 13.5 (ऐच्छिक)*

1. 1256 cm; 788g (लगभग) **2.** 30.14 cm^3; 52.75 cm^2

3. 1792 **4.** $782\frac{4}{7} \text{ cm}^2$

प्रश्नावली 14.1

1. 8.1 पौधे। हमने प्रत्यक्ष विधि का प्रयोग किया है क्योंकि x_i तथा f_i के संख्यात्मक मूल्य कम हैं।

2. ₹ 145.20 **3.** $f = 20$ **4.** 75.9

5. 57.19 **6.** ₹ 211 **7.** 0.099 ppm

8. 12.38 दिन **9.** 69.43 %

प्रश्नावली 14.2

1. बहुलक = 36.8 वर्ष, माध्य = 35.37 वर्ष। अस्पताल में भर्ती अधिकतम रोगी 36.8 वर्ष आयु (लगभग) के हैं। जब कि औसतन अस्पताल में भर्ती किए गए रोगियों की आयु 35.57 वर्ष है।

2. 65.625 घंटे

3. बहुलकीय मासिक खर्च = 1847.83 रु, माध्यीय मासिक खर्च = 2662.5 रु

4. बहुलक : 30.6, माध्य = 29.2. अधिकांश राज्यों/U.T. में छात्र और अध्यापक का अनुपात 30.6 है और औसतन यह अनुपात 29.2 है।

5. बहुलक = 4608.7 रन **6.** बहुलक = 44.7 कार

प्रश्नावली 14.3

1. माध्यक = 137 इकाई, माध्य = 137.05 इकाई, बहुलक = 135.76 इकाई

इस स्थिति में ये तीनों मापक लगभग समान हैं।

2. $x = 8, y = 7$ **3.** माध्यक आयु = 35.76 वर्ष

4. माध्यक लंबाई = 146.75 mm **5.** माध्यक जीवन = 3406.98 घंटे

6. माध्यक = 8.05, माध्य = 8.32, बहुलक = 7.88

7. माध्यक भार = 56.67 kg

प्रश्नावली 14.4

1.

दैनिक आय (रु में)	संचयी बारंबारता
120 से कम	12
140 से कम	26
160 से कम	34
180 से कम	40
200 से कम	50

बिंदुओं(120, 12), (140, 26), (160, 34), (180, 40) और (200, 50) को आलेखित कर तोरण खींचिए।

2. बिंदुओं: (38, 0), (40, 3), (42, 5), (44, 9), (46, 14), (48, 28), (50, 32) और(52, 35) को आलेखित कर तोरण खींचिए।. यहाँ $\frac{n}{2} = 17.5$. तोरण पर उन बिंदुओं को निर्दिष्ट कीजिए जिसकी कोटि 17.5 है। इस बिंदु का x-निर्देशांक माध्यक होगा।

3.

उत्पादन (kg/ha)	संचयी बारंबारता
50 के बराबर या अधिक	100
55 के बराबर या अधिक	98
60 के बराबर या अधिक	90
65 के बराबर या अधिक	78
70 के बराबर या अधिक	54
75 के बराबर या अधिक	16

बिंदुओं: (50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78), (70, 54) और (75, 16) को आलेखित कर तोरण खींचिए।

प्रश्नावली 15.1

1. (i) 1 (ii) 0, असंभव घटना (iii) 1, अवश्य या निश्चित घटना
(iv) 1 (v) 0, 1

2. प्रयोग (iii) और (iv) सम-संभावी परिणाम देते हैं।

3. जब हम एक सिक्का उछालते हैं तो चित और पट आने का परिणाम सम-संभावी हैं। इसलिए किसी सिक्के के उछाल का परिणाम पूर्णतया प्रागुक्त नहीं है।

4. B **5.** 0.95 **6.** (i) 0 (ii) 1

7. 0.008 **8.** (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

9. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$ **10.** (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

11. $\frac{5}{13}$ **12.** (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

13. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

14. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{3}{26}$ (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

15. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) (a) $\frac{3}{4}$ (b) **0** **16.** $\frac{11}{12}$

17. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$ **18.** (i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

19. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ **20.** $\frac{\pi}{24}$ **21.** (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

22. (i)

दोनों पासों पर संख्याओं का योग	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रायिकता	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) नहीं। ये 11 परिणाम सम-संभावी नहीं हैं।

23. $\frac{3}{4}$; संभव परिणाम हैं: HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, यहाँ THH का अर्थ पहले उछाल में पट, दूसरे में चित तथा तीसरे में भी चित इत्यादि।

24. (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

25. (i) सत्य नहीं है। हम इस प्रकार परिणामों को वर्गीकृत कर सकते हैं परंतु वे सम-संभावी नहीं हैं क्योंकि दोनों सिक्कों को उछालने पर यह हो सकता है कि पहले पर चित और दूसरे पर पट या पहले पर पट तथा दूसरे पर चित आए। इसलिए एक पर पट तथा दूसरे पर चित आने की संभावना दोनों पर चित (या दोनों पर पट) आने की संभावनाओं का दुगुना है।

(ii) सही है। प्रश्न में विचारित दोनों परिणाम सम-संभावी हैं।

प्रश्नावली 15.2 (ऐच्छिक)*

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{8}{25}$ (iii) $\frac{4}{5}$

2.

	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2	3	4	4	5	5	8
3	4	5	5	6	6	9
3	4	5	5	6	6	9
6	7	8	8	9	9	12

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{5}{12}$

3. 10 **4.** $\frac{x}{12}$, $x = 3$ **5.** 8

प्रश्नावली A1.1

1. (i) संदिग्ध (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) संदिग्ध
(v) संदिग्ध

2. (i) सत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) सत्य

3. केवल (ii) ही सत्य है

4. (i) यदि $a > 0$ और $a^2 > b^2$, तब $a > b$.

(ii) यदि $xy \geq 0$ और $x^2 = y^2$, तब $x = y$.

(iii) यदि $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ और $y \neq 0$, तब $x = 0$.

(iv) समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

प्रश्नावली A1.2

1. A नश्वर है।

2. ab परिमेय संख्या है।

3. $\sqrt{17}$ का दशमलव प्रसारण अनवसानी और अनावर्ती है।

4. $y = 7$

5. $\angle A = 100°, \angle C = 100°, \angle D = 180°$

6. PQRS एक आयत है।

7. हाँ, परिकल्पना के आधार पर। नहीं, क्योंकि $\sqrt{3721} = 61$ है जो अपरिमेय नहीं है। चूँकि परिकल्पना गलत थी इसलिए निष्कर्ष असत्य है।

प्रश्नावली A1.3

1. किसी पूर्णांक n के लिए क्रमागत विषम संख्याएँ $2n + 1$ और $2n + 3$ लीजिए।

प्रश्नावली A1.4

1. (i) मनुष्य नश्वर नहीं है।

(ii) रेखा l रेखा m के समांतर नहीं है।

(iii) अध्याय में बहुत प्रश्नावलियाँ नहीं हैं।

(iv) सभी पूर्णांक परिमेय संख्याएँ नहीं हैं।

(v) सभी अभाज्य संख्याएँ विषम नहीं हैं।

(vi) कुछ छात्र सुस्त हैं।

(vii) सभी बिल्लियाँ काली हैं।

(viii) कम से कम एक वास्तविक संख्या x ऐसी है ताकि $\sqrt{x} = -1$.

(ix) धनात्मक पूर्णांक a को 2 विभाजित नहीं करता है।

(x) पूर्णांक a और b सहअविभाज्य हैं।

2. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) नहीं (iv) नहीं (v) हाँ

प्रश्नावली A1.5

1. (i) यदि शरन को अधिक पसीना आता है, तो टोक्यो में गर्मी है।

(ii) यदि शालीनी का पेट कुड़कुड़ाता है, तब वह भूखी है।

(iii) यदि जसवंत डिग्री प्राप्त कर सकता है, तो वह छात्रवृत्ति पाता है।

(iv) यदि पौधा जीवित है, तब इसमें फूल हैं।

(v) यदि जानवर के पूँछ है, तब यह बिल्ली है।

2. (i) यदि त्रिभुज ABC के आधार पर बने कोण बराबर हैं तो यह समद्विबाहु त्रिभुज है। सत्य

(ii) यदि किसी पूर्णांक का वर्ग विषम है तो पूर्णांक भी विषम है। सत्य

(iii) यदि $x = 1$, तब $x^2 = 1$. सत्य

(iv) यदि AC और BD एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तो ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। सत्य

(v) यदि $a + (b + c) = (a + b) + c$, तब a, b और c पूर्ण संख्याएँ हैं। असत्य

(vi) यदि $x + y$ एक सम संख्या है तब x और y विषम संख्याएँ हैं। असत्य

(vii) यदि समांतर चतुर्भुज एक आयत है तब इसके शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हैं। सत्य

प्रश्नावली A1.6

1. $b \leq d$ के विपरीत मान लीजिए।

3. अध्याय 1 के उदाहरण 10 को देखें।

6. कक्षा IX की गणित पाठ्य पुस्तक में प्रमेय 5.1 देखें।

प्रश्नावली A2.2

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160

2. 1 cm^2 क्षेत्रफल लीजिए तथा इसमें बिंदुओं की संख्या गिनिए। कुल पेड़ों की संख्या इस संख्या तथा क्षेत्रफल (cm^2 में) का गुणनफल होगा।

3. किस्त योजना के अंतर्गत ब्याज की दर 17.74% है जो 18% से कम है।

प्रश्नावली A2.3

1. छात्र स्वयं अपने उत्तर ज्ञात करें।